

Pék Johanna

Ábrázoló geometria 2.
előadáskövető feladatlapok

1. Görbék, másodrendű görbék

Görbékről általában

Definíció szemléletesen: Egy mozgó pont pályája síkban vagy térben.

Analitikus definíció: $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ vagy 3) differenciálható leképezés (reguláris: $\dot{c}(t) \neq \underline{0}$ teljesül minden t -re)

(Részletesen és precízen lásd a Matematika II. tantárgyban.)

Tipikus megadási módok:

- paraméteres alak – pl. $c(t) = (\overbrace{t}^x, \overbrace{\sin(t)}^y), t \in \mathbb{R}$
- implicit alak (egyenlet) – pl. $y = \sin(x)$

Görbék jellemző adatai

Pontbeli érintő: $\dot{c}(t_0)$ vagy „szelők határhelyzete”

Pontbeli érintőegyenes:

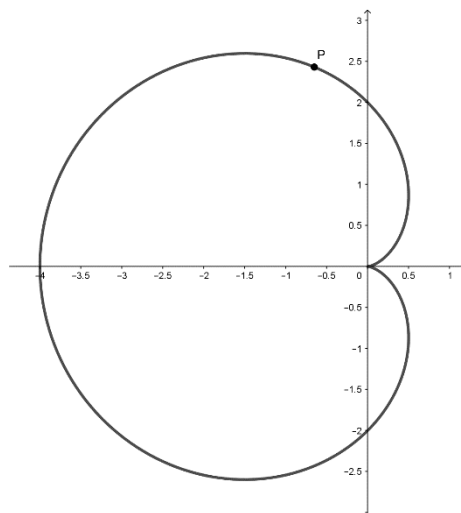
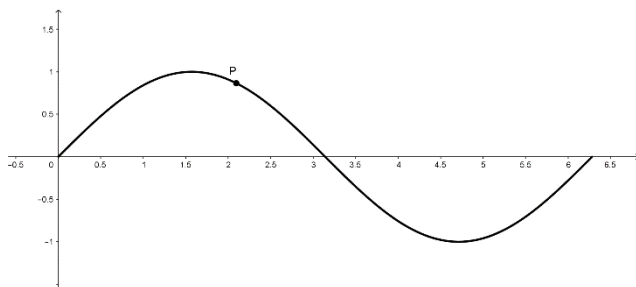
Pontbeli normális: az érintőre merőleges (+ simulósíkban nyugszik)

Pontbeli normális egyenes:

Görbepontok típusai

- reguláris
- szinguláris

inflexiós pont:



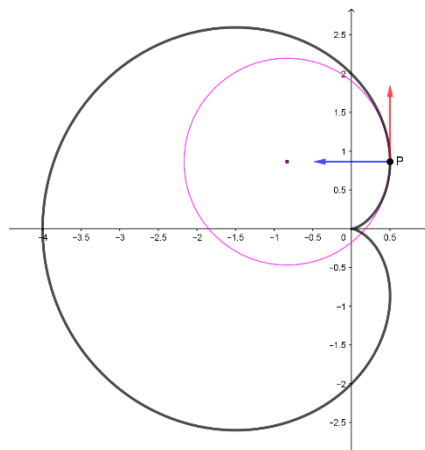
Görbület (egy pontban): „A görbe mennyire hajlik el a pontbeli érintőegyenestől.”

Példák

egyenes görbülete minden pontban:

kör görbülete minden pontban:

változó görbületű síkgörbe:



Simulókör (egy pontban): görbülete ugyanakkora, mint az adott görbe pontbeli görbülete.

Érdekességek

Egy térgörbe ún. Frenet-bázisa

érintő(egyes)

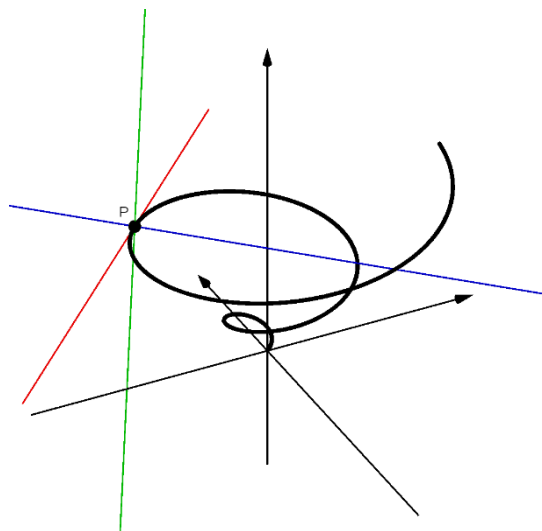
főnormális (egyes)

binormális (egyes)

simulósík

normálsík

rektifikálósík



Torzió: „A görbe mennyire csavarodik ki a görbe pontbeli simulósíkjából.”

Síkgörbék torziója:

Másodrendű görbék

Algebrai görbe: egyenlete $\sum_{i,j} a_{ij}x^i x^j = 0$ alakú a Descartes-féle koordinátarendszerben.

Másodrendű görbe: olyan algebrai görbe, melynek egyenlete másodfokú.

Nem elfajuló másodrendű görbék: ellipszis (kör), parabola, hiperbola

(Elfajuló másodrendű görbék: pont, egyenes, metsző egyenespár, párhuzamos egyenespár)

Ellipszis

kanonikus egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól (F_1, F_2) való távolságának összege állandó ($2a$). (Feltétel: $d(F_1, F_2) < 2a$)

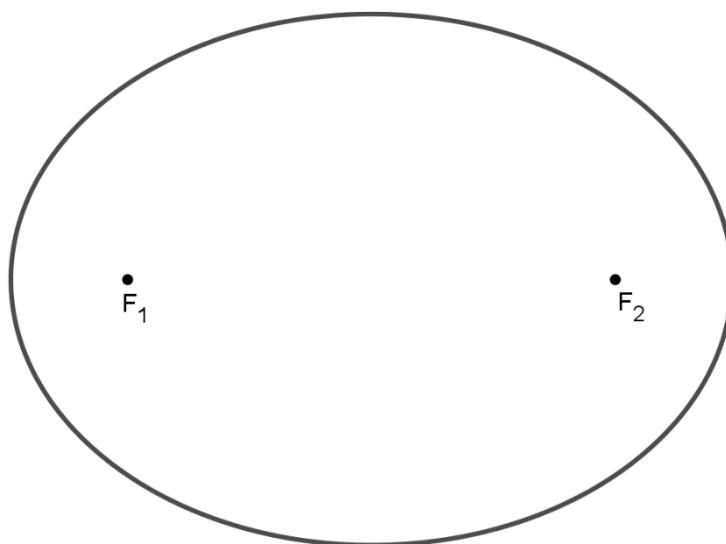
Fókuszok:

Középpont:

Nagy tengely:

Kis tengely:

Tengelyek végpontjai:

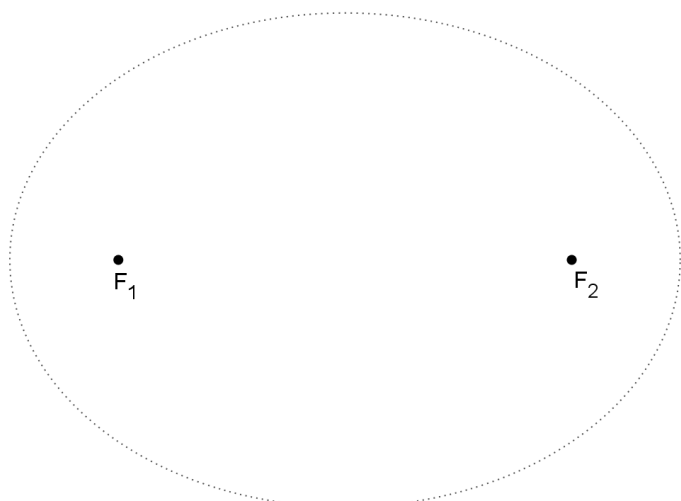


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fokális sugarak P-ben:

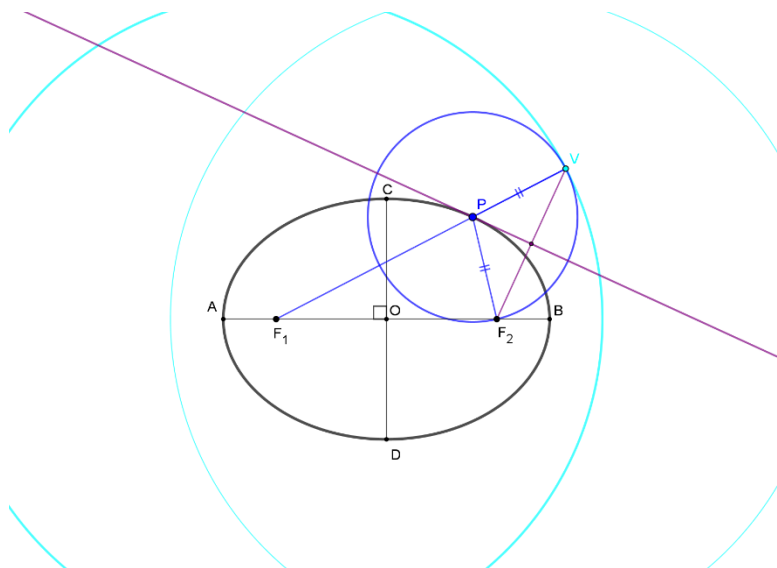
Érintőegyenest P-ben:

Tetszőleges ellipszispont szerkesztése



Vezérkörök: F_1 középpontú, $2a$ sugarú kör és F_2 középpontú, $2a$ sugarú kör

„Új” definíció: Az ellipszis azon körök középpontjainak mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponton áthaladnak és egy adott kört belülről érintenek.



Parabola

kanonikus egyenlete: $y^2 = 2px$

Azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott egyenestől és egy arra nem illeszkedő ponttól egyenlő távolságra vannak.

Fókusz:

Vezéregyenes:

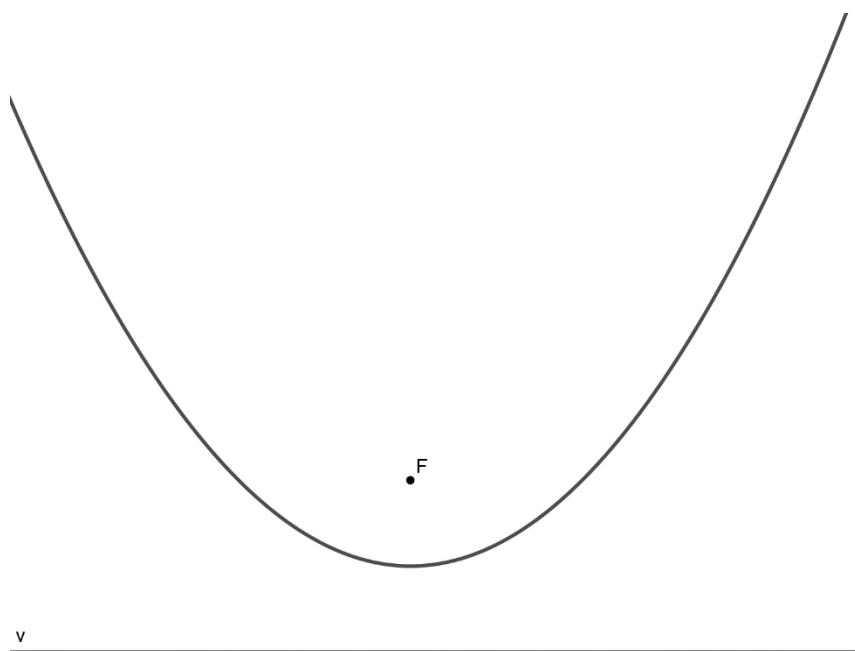
Tengely:

Csúcspont:

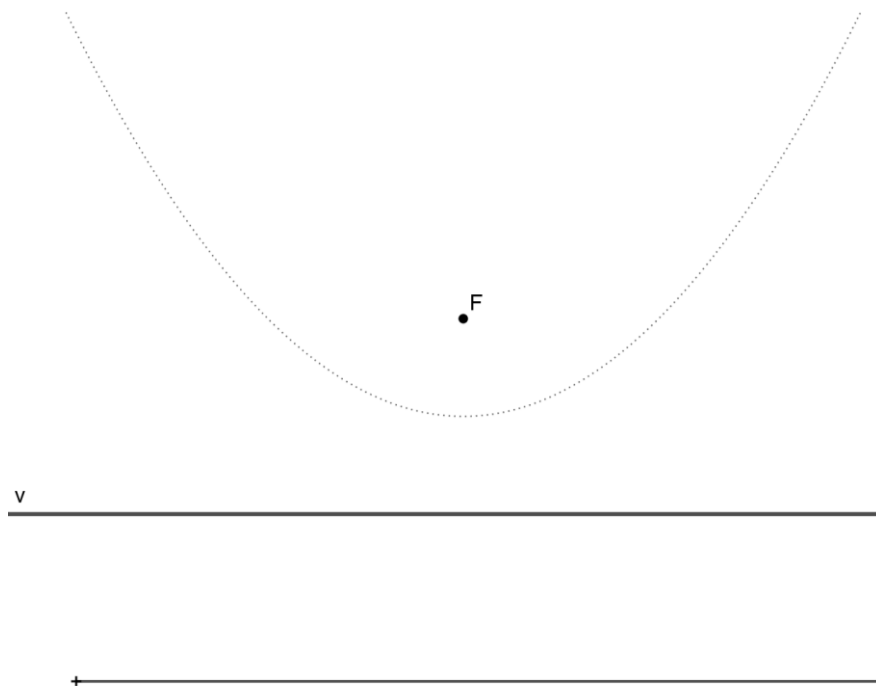
Paraméter:

Fokális sugarak P-ben:

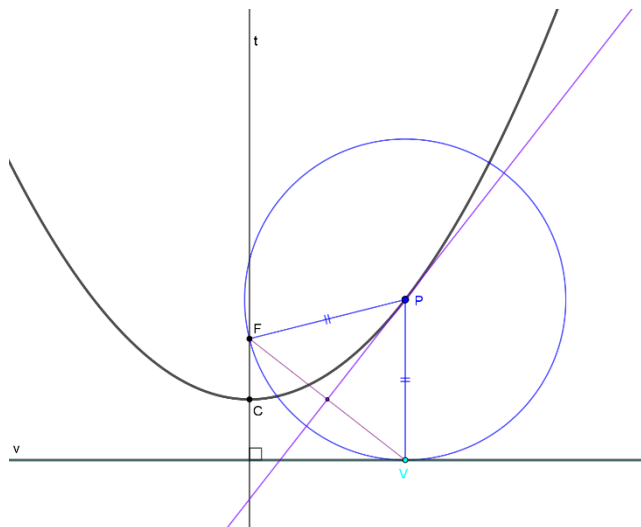
Érintőegyenes P-ben:



Tetszőleges parabolapont szerkesztése



„Új definíció”: A parabola azon körök középpontjainak mértani helye a síkban, amelyek egy adott egyenest érintenek és egy arra nem illeszkedő ponton áthaladnak.



Hiperbola

kanonikus egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

A hiperbola azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól (F_1, F_2) mért távolságkülönbségének abszolútértéke állandó ($2a$).

(Feltétel: $d(F_1, F_2) > 2a$)

Fókuszok:

Középpont:

Valós tengely:

Képzetes tengely:

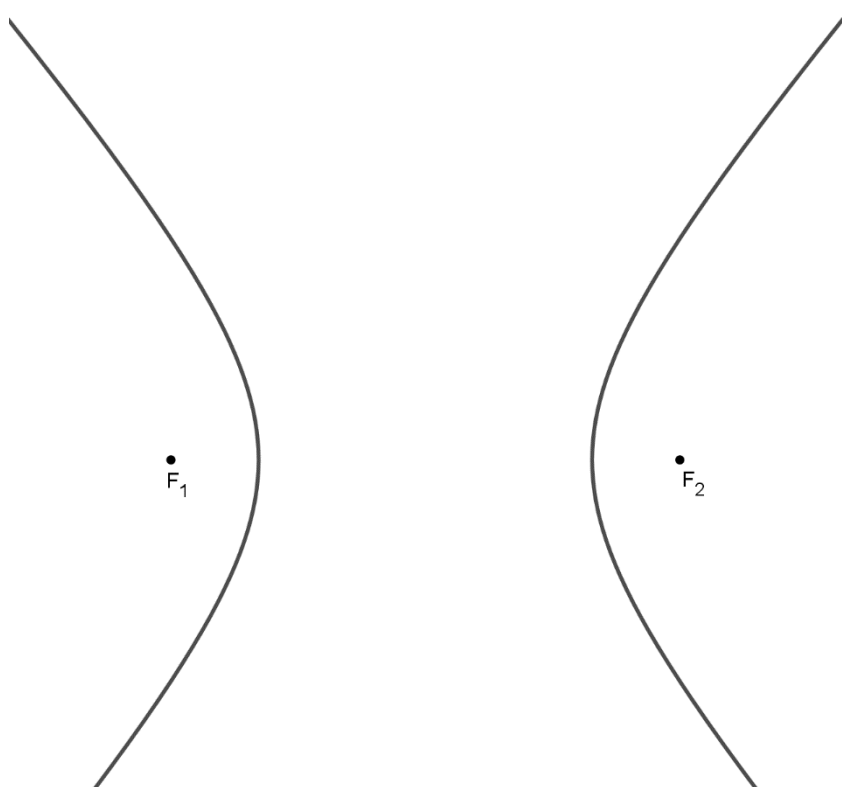
Csúcspontok:

Aszimptoták:

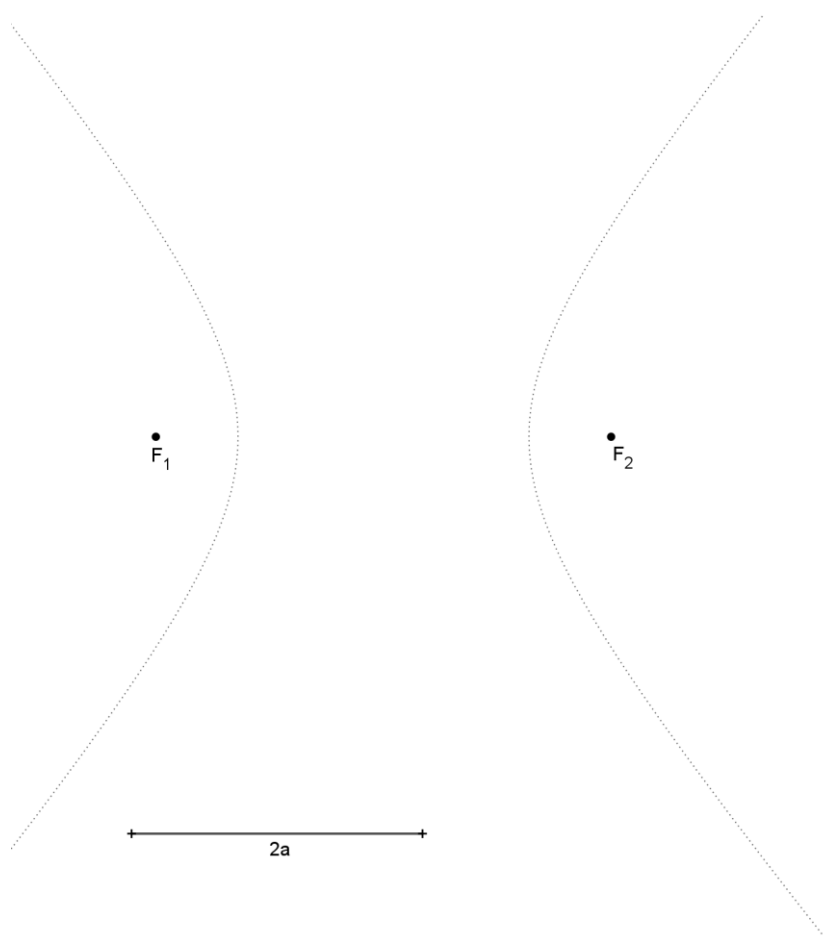
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Fokális sugarak P-ben:

Érintőegyenest P-ben:

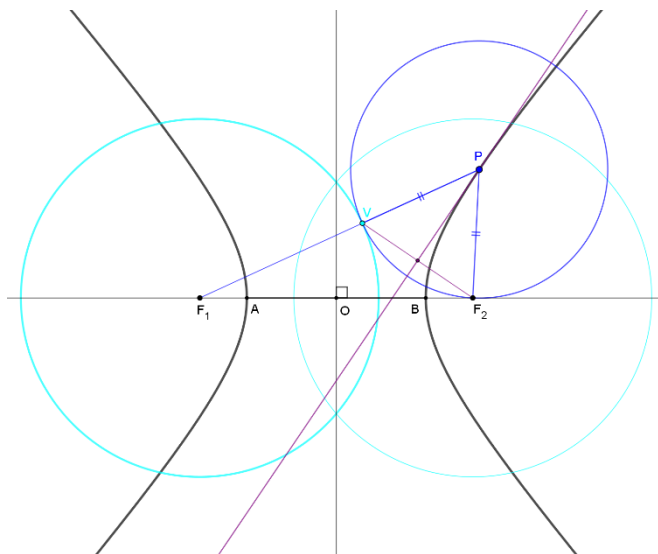


Tetszőleges hiperbolapont szerkesztése



Vezérkörök: F_1 középpontú, $2a$ sugarú kör és F_2 középpontú, $2a$ sugarú kör

„Új” definíció: A hiperbola azon körök középpontjainak mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponton áthaladnak és egy adott kört kívülről érintenek.

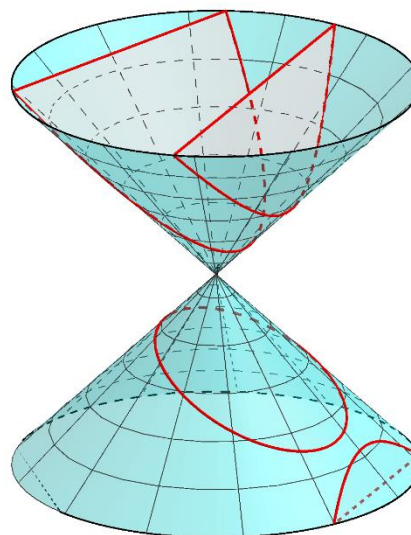


A másodrendű görbék előállíthatók egy kúp síkmetszeteiként is. (Lásd később.)

Ellipszismetszet

Parabolas metszet

Hiperbolas metszet



Érdekesség: Egy másodrendű görbét öt általános helyzetű pontja egyértelműen meghatározza.

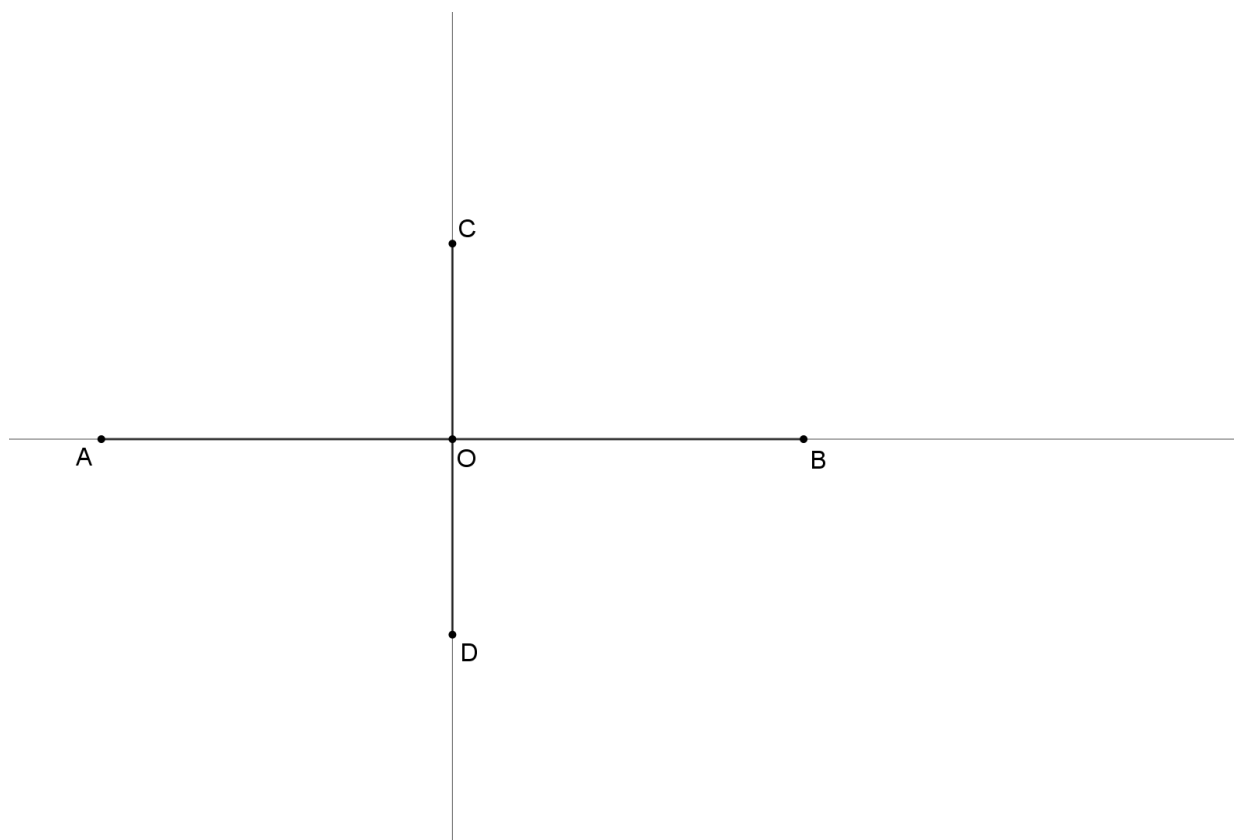
Alapvető szerkesztések

(kiegészítve a gyakorlati anyaggal)

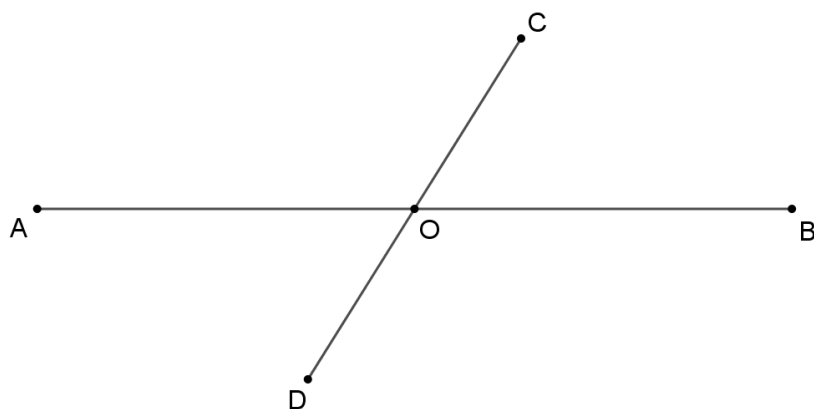
Ellipszis

Az alapszerkesztéseket lásd az előző félévben.

Adott egy ellipszis kis- és nagytengelyével. Szerkesztendő az ellipszis egy tetszőleges pontja és abban az érintő.

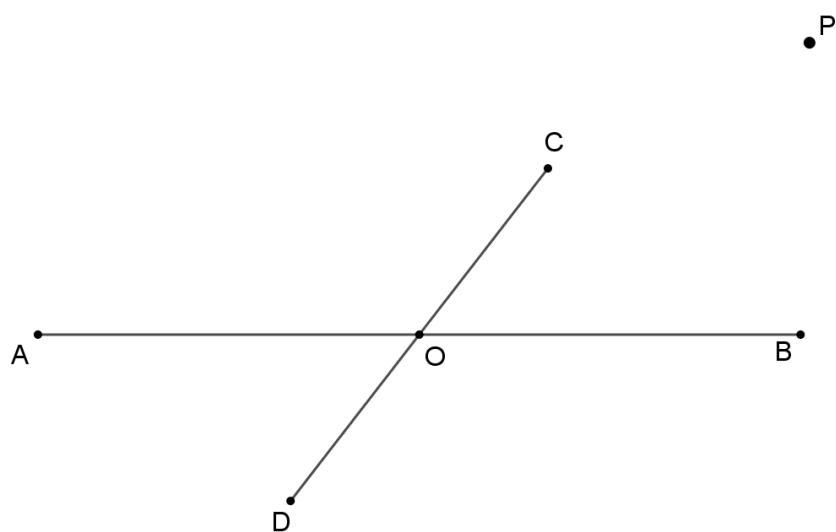


Adott egy ellipszis konjugált átmérőpárjával. Szerkesztendő az ellipszis egy tetszőleges pontja és abban az érintő.

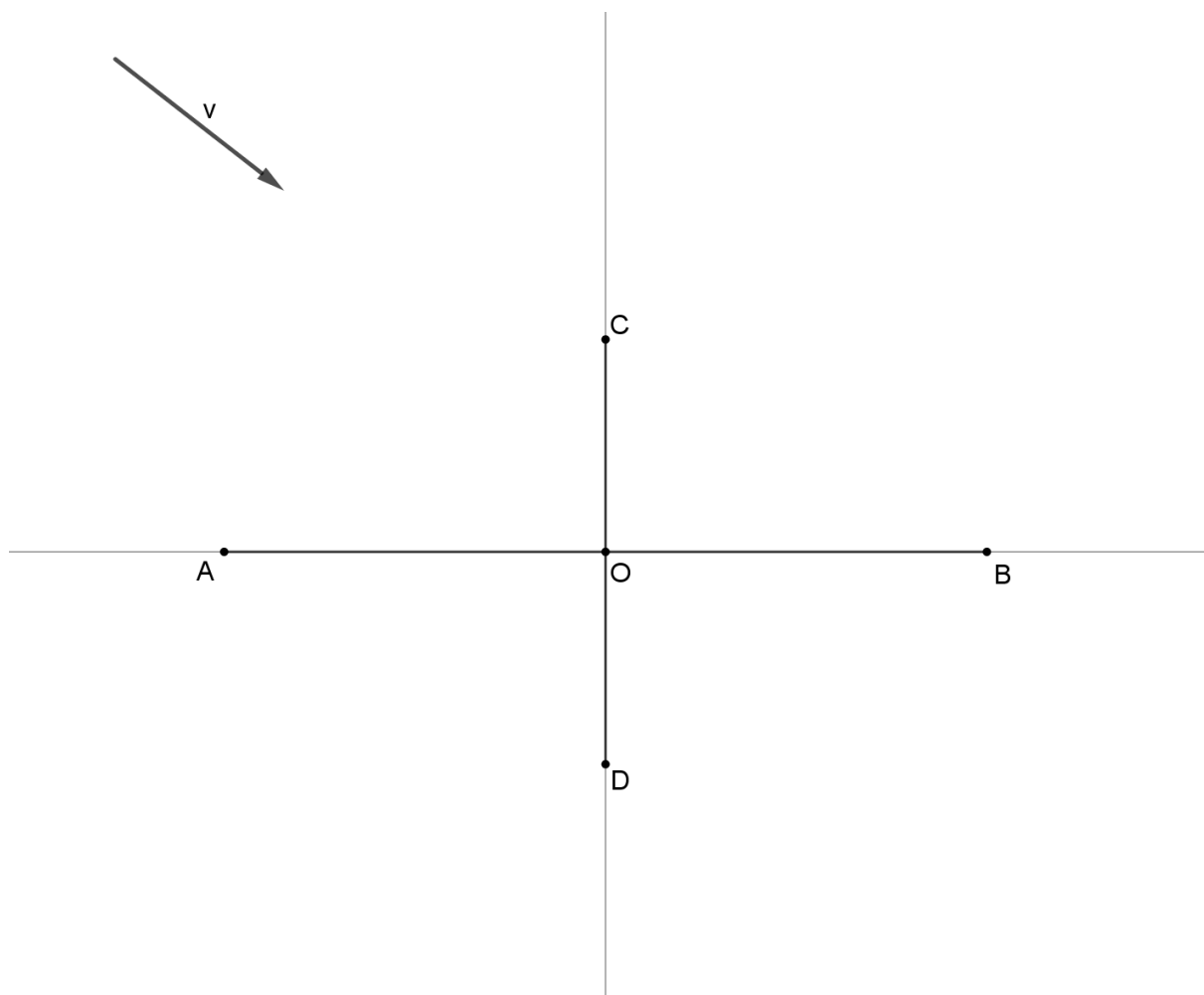


(Előadás vége.)

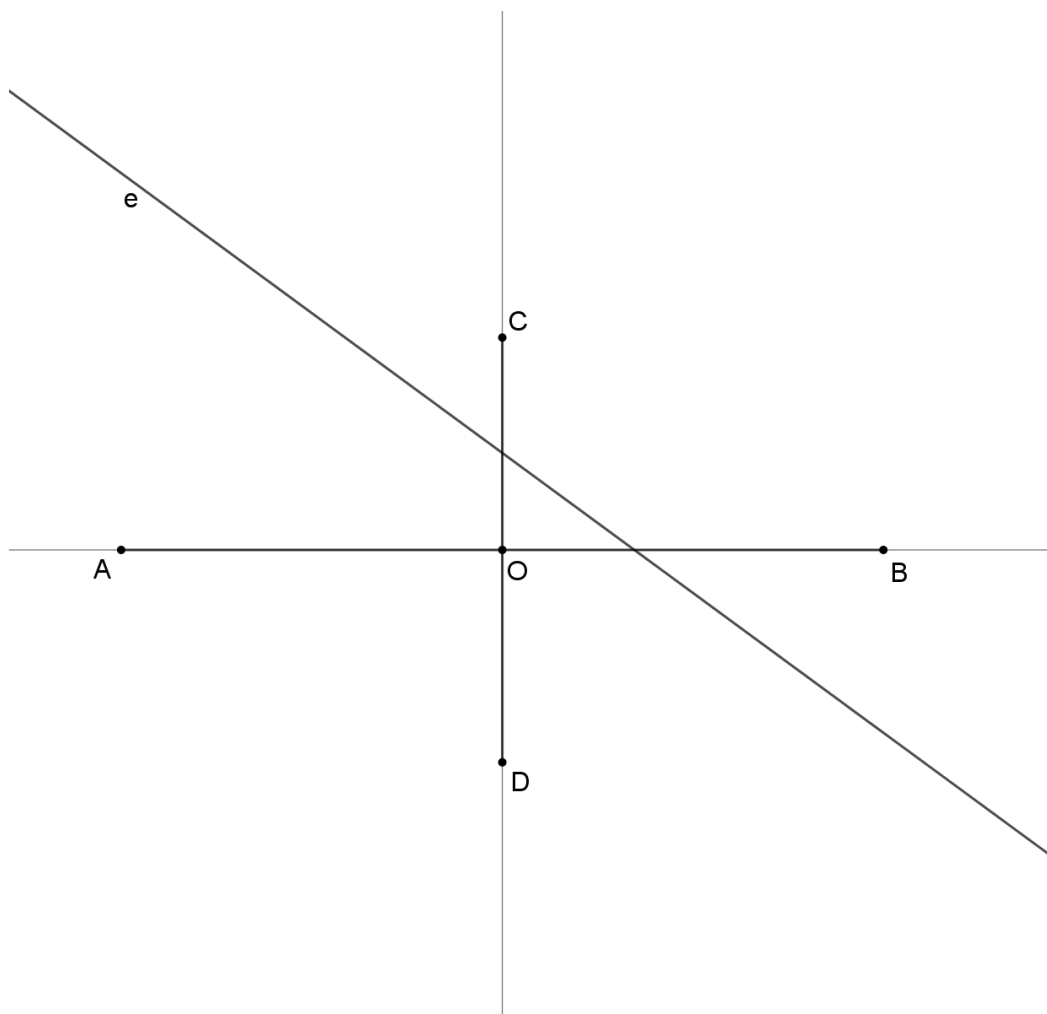
Adott egy ellipszis egy konjugált átmérőpárjával és egy külső pont. Szerkesztendő a külső pontból az ellipszishez húzható érintők.



Adott egy ellipszis tengelyeivel és egy irány. Szerkesztendő az iránnyal párhuzamos ellipszisérintők.



Adott egy ellipszis tengelyeivel és egy egyenes. Szerkesztendő a metszéspontok.

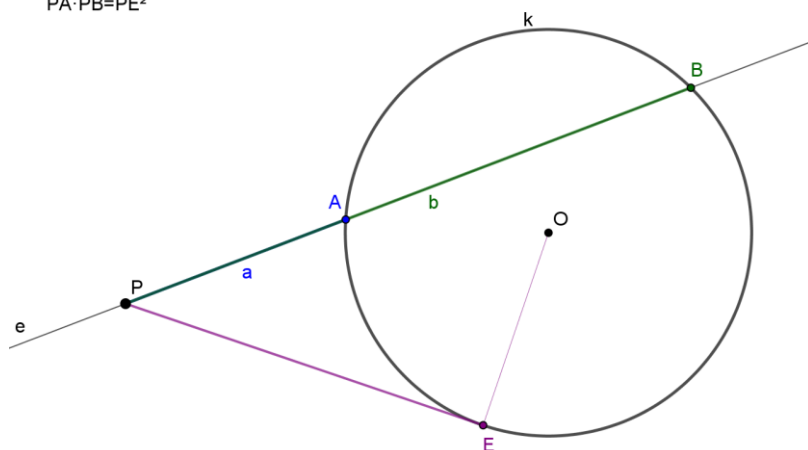


Előkészületek a további szerkesztésekhez

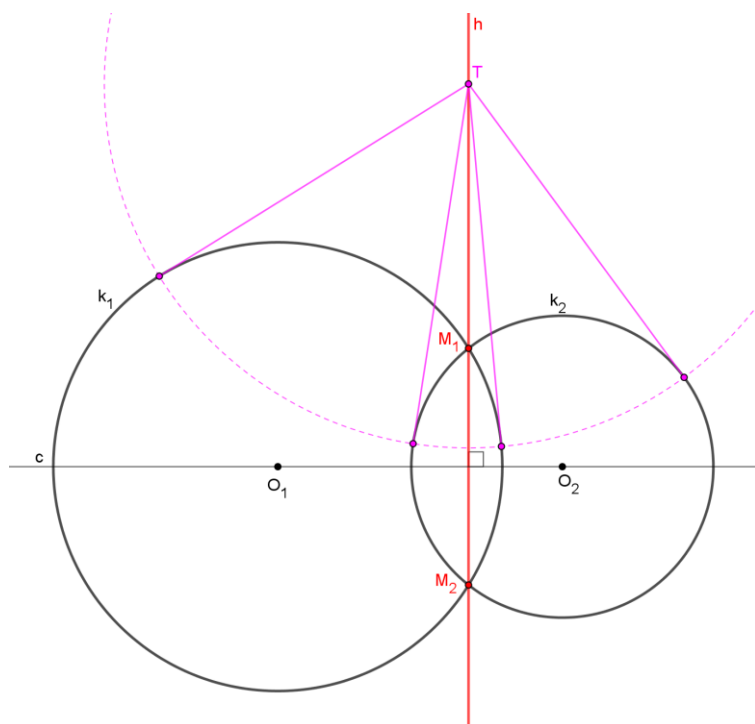
Pont körre vonatkozó hatványa

$$PA \cdot PB = 4,11 \cdot 10,55 = 43,37 = \text{áll.}$$

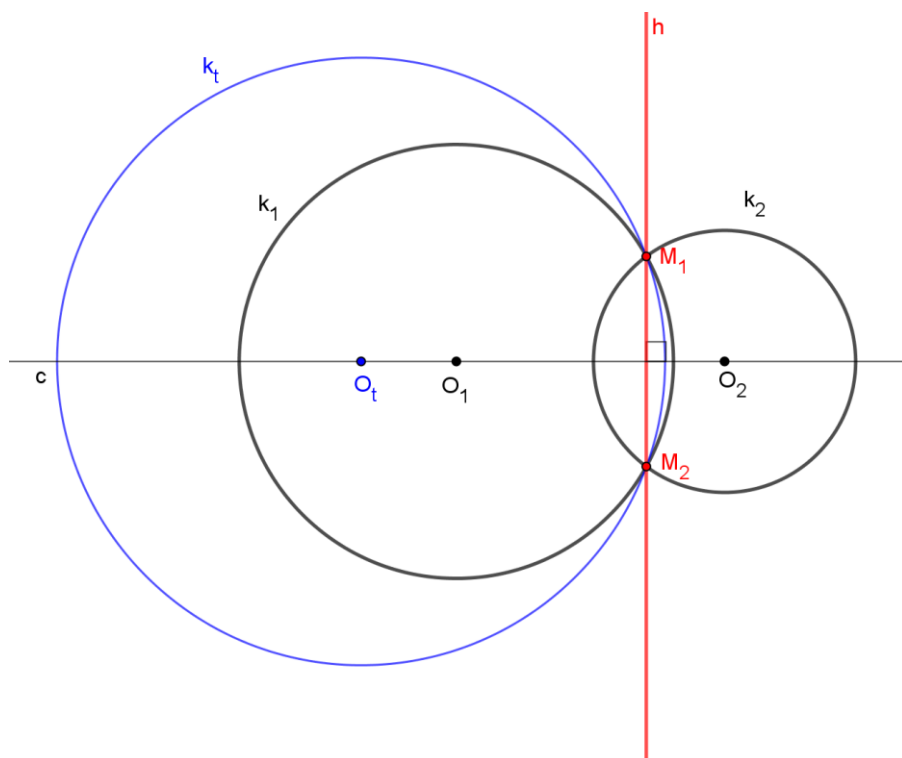
$$PA \cdot PB = PE^2$$



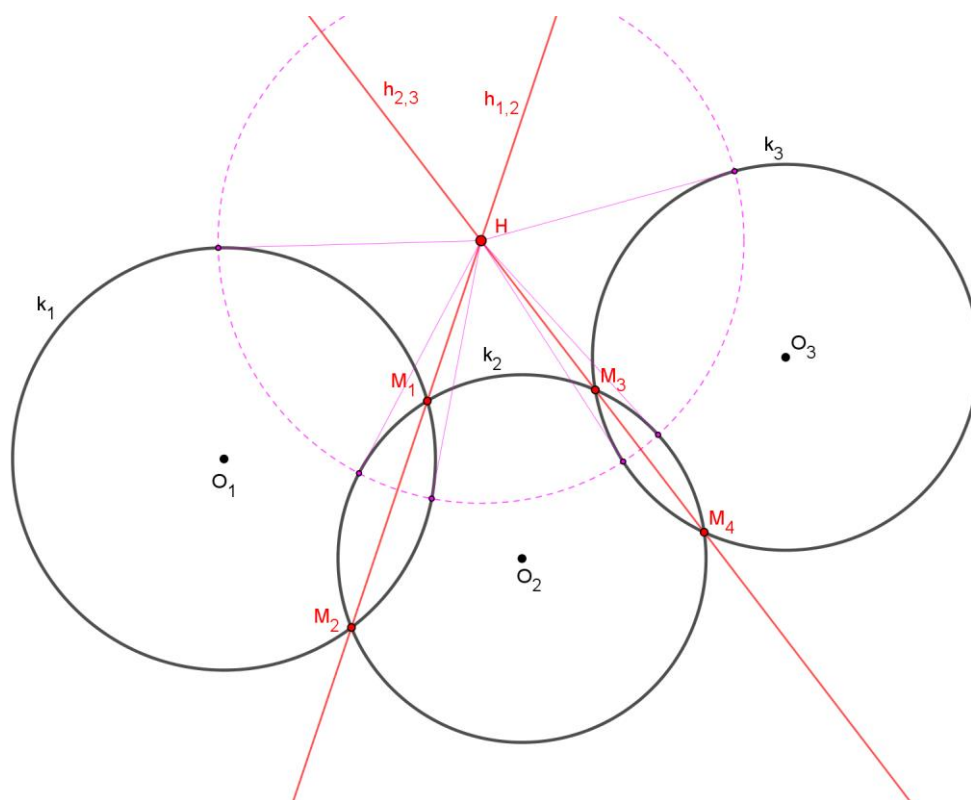
Két kör hatványvonala



Hatványvonal több kör esetén

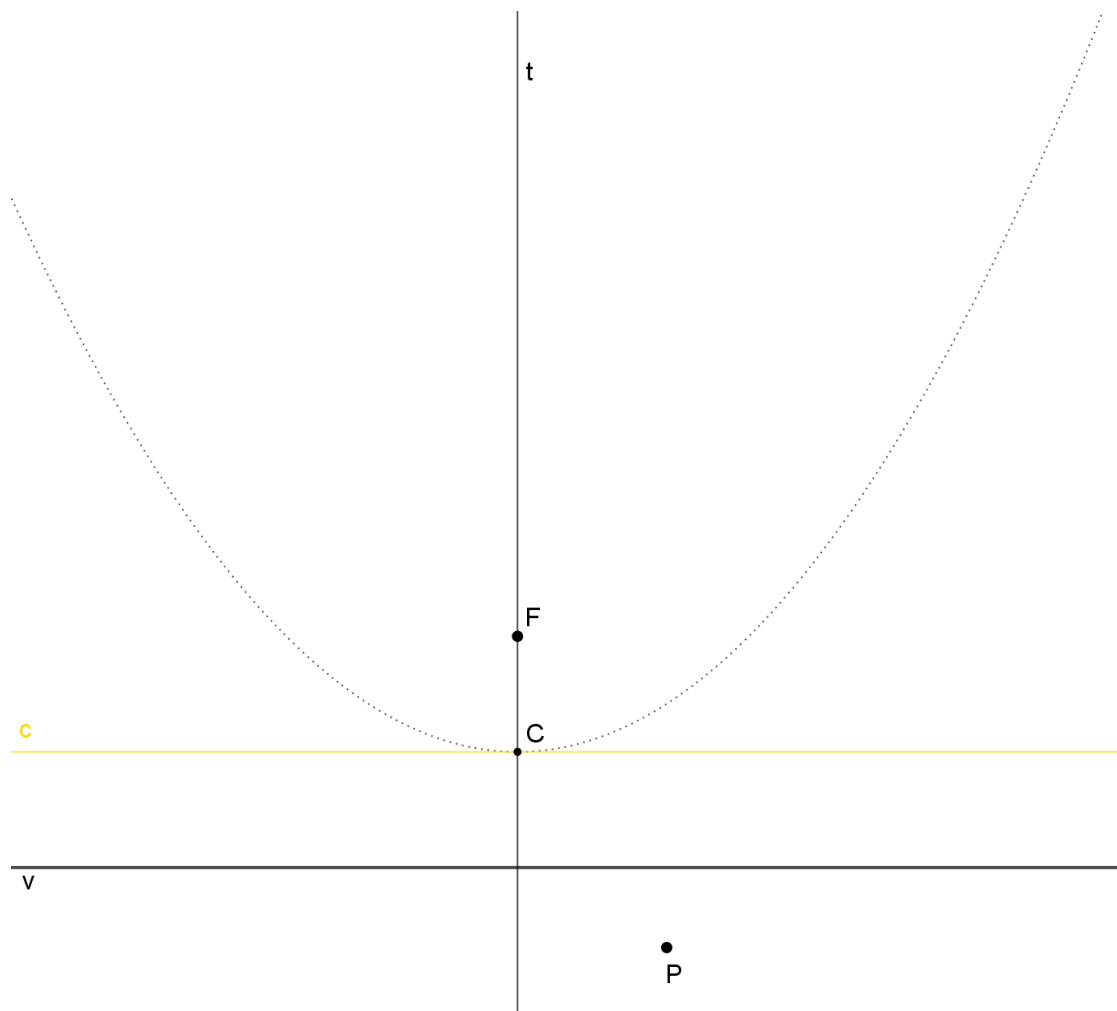


Három kör hatványpontja, hatványvonal szerkesztése nem metsző körök esetén

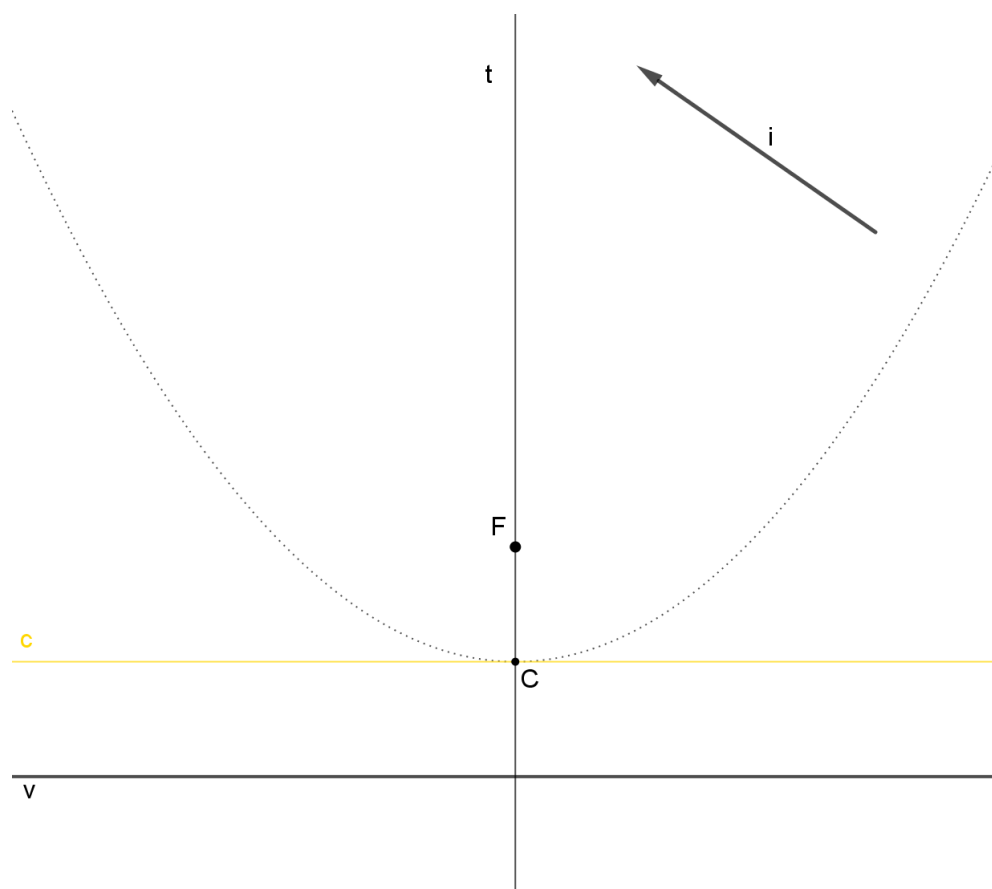


Parabola

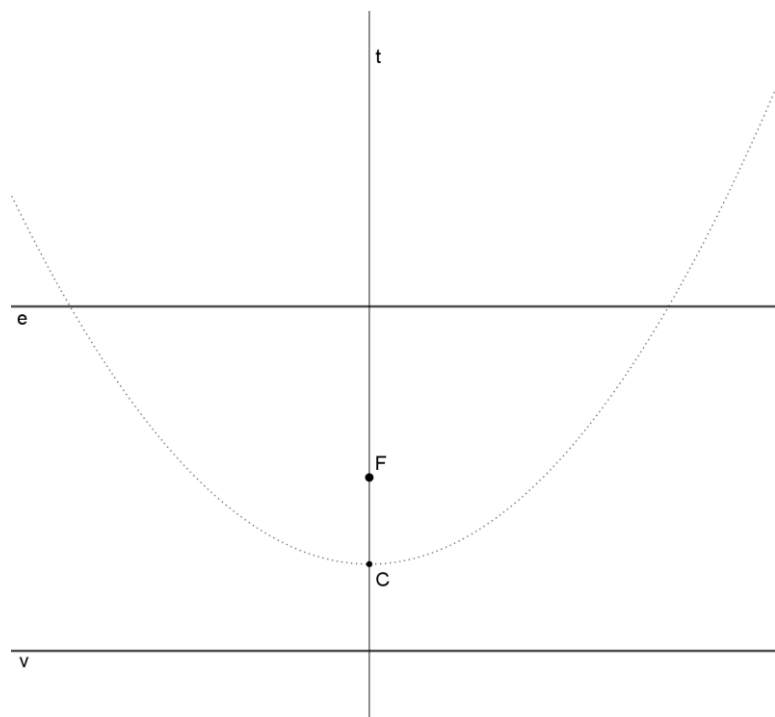
Adott egy parabola fókuszával és vezéregyenesével, továbbá egy külső pont. Szerkesztendő a parabolához a külső pontból húzható érintők.



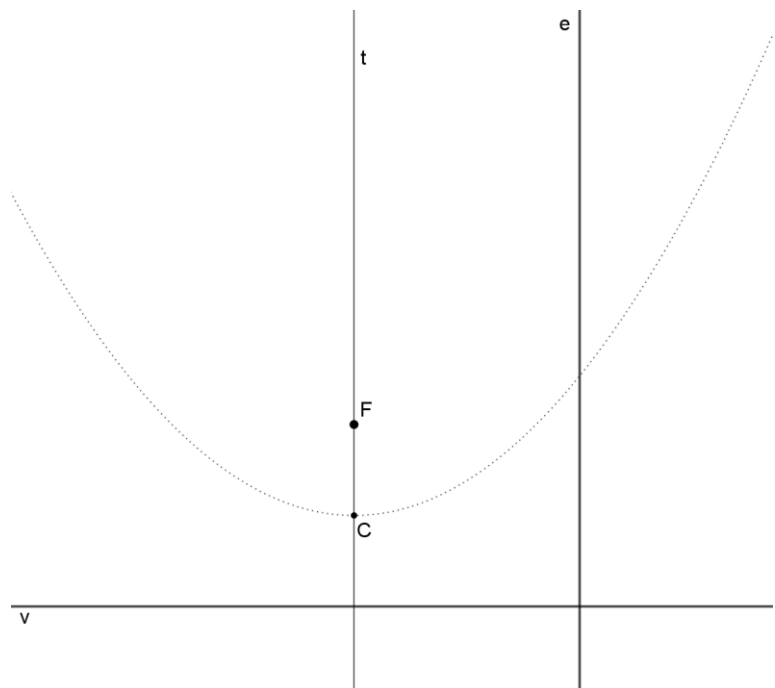
Adott egy parabola fókuszával és vezéregyenesével, továbbá egy irány. Szerkesztendő a parabola adott irányú érintője.



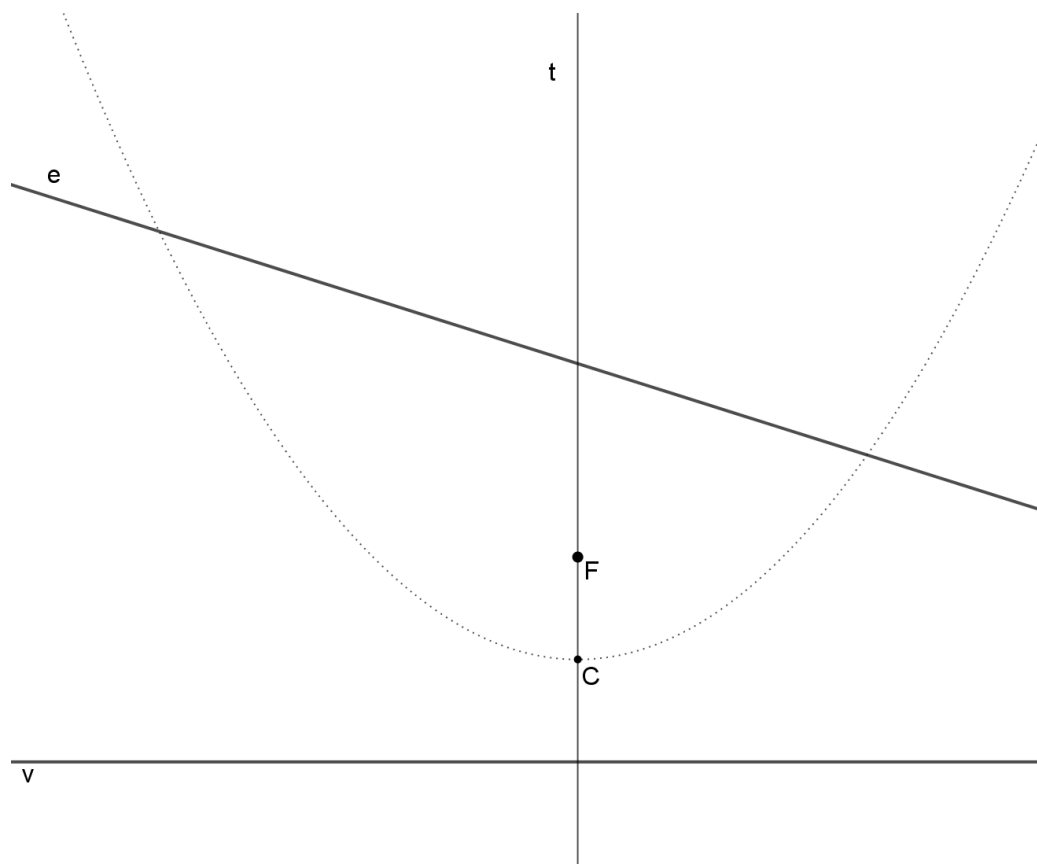
Adott egy parabola fókuszával és vezéregyenesével, továbbá egy vízszintes egyenes. Szerkesztendő a metszéspontok.



Adott egy parabola fókuszával és vezéregyenesével, továbbá egy függőleges egyenes. Szerkesztendő a metszéspontok.

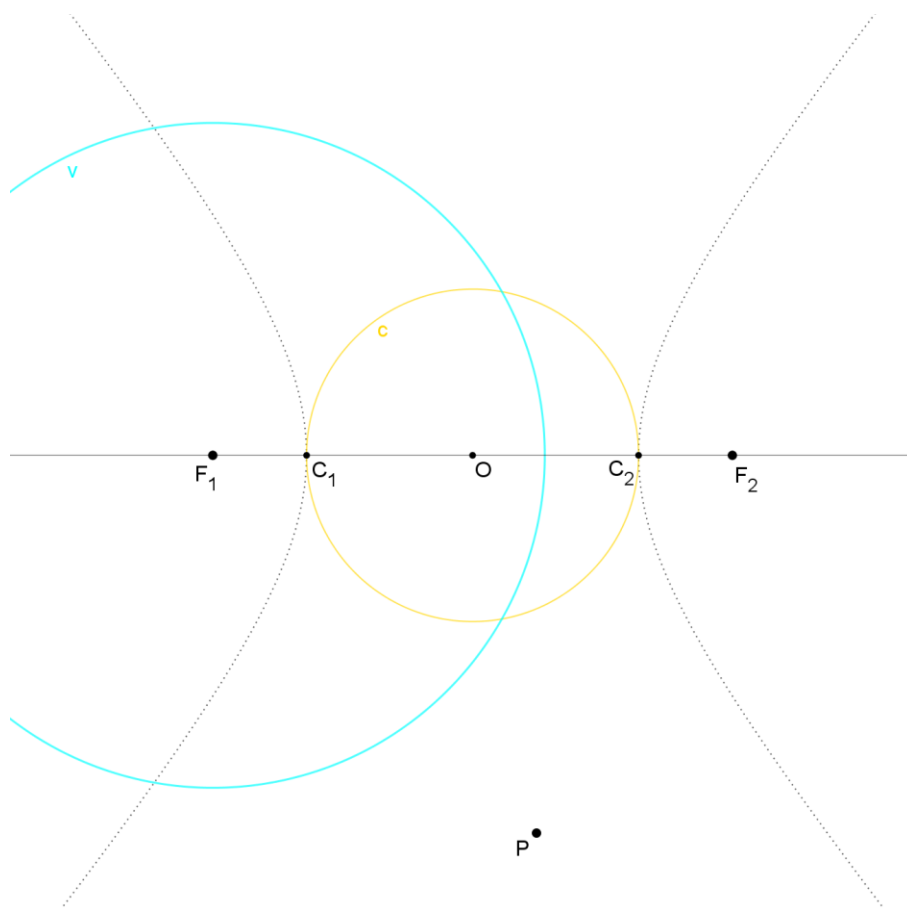


Adott egy parabola fókuszával és vezéregyenesével, továbbá egy egyenes. Szerkesztendő a metszéspontok.



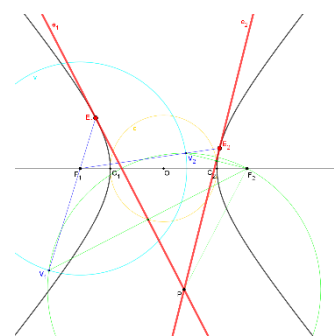
Hiperbola (kiegészítő anyag)

Adott egy hiperbola két fókuszja és a $2a$ távolság, továbbá egy külső pont. Szerkesztendő a külső pontból a hiperbolához húzható érintők.

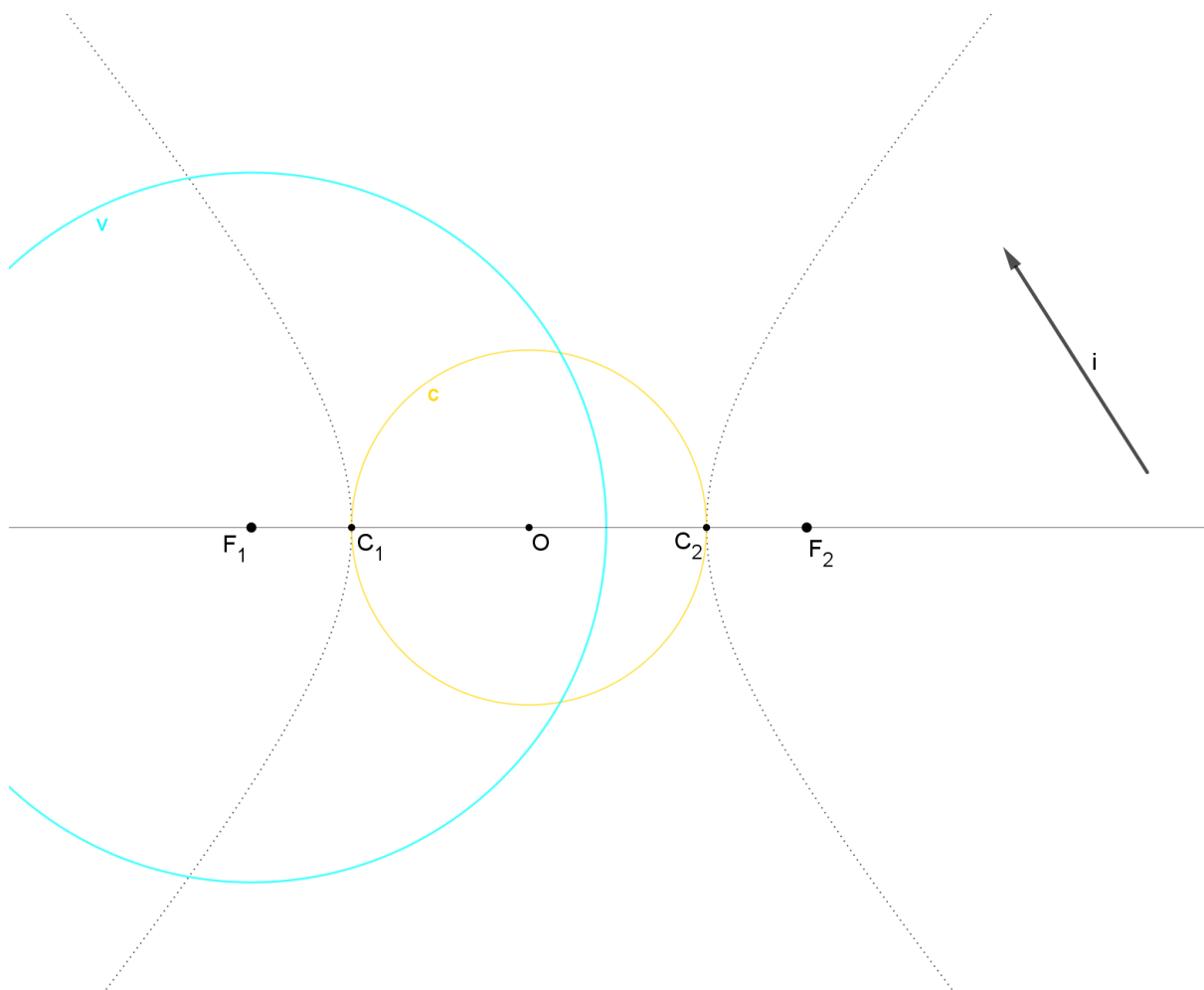


A szerkesztés vázlatos ismertetése

1. Induljunk ki például az F_1 középpontú vezérkörből, majd szerkesszünk egy P középpontú, PF_2 sugarú kört. (Az adott pont egy érintőn van, ami a leendő fokális sugarak szögfelezője. Itt az F_2 -t tükrözzük a leendő érintőre.)
2. Ezen kör és a vezérkör metszéspontjai: V_1 és V_2 (Például V_1 az F_1 -en keresztül húzható egyik fokális sugár eleme. Az „új” definíció alapján a keresett E_1 érintési ponthoz tartozó kör V_1 -ben érinti a vezérkört.)
3. A V_1F_2 szakasz felezőmerőlegese az egyik keresett érintő: e_1 . (Érdekesség: a felezőpont a c körön nyugszik.)
4. A V_1F_1 fokális sugár kimetszi az érintési pontot: E_1 .
5. Ismételjük meg a 3-4. lépéseket a V_2 -re is: e_2 és E_2 .



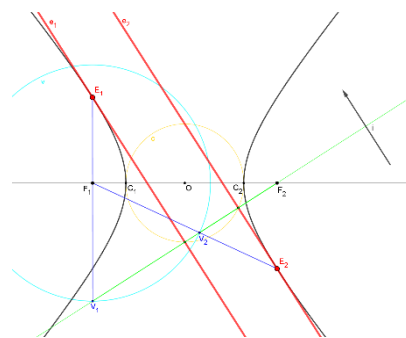
Adott egy hiperbola két fókusza és a $2a$ távolság, továbbá egy irány. Szerkesztendő a hiperbola adott iránnyal párhuzamos érintői.



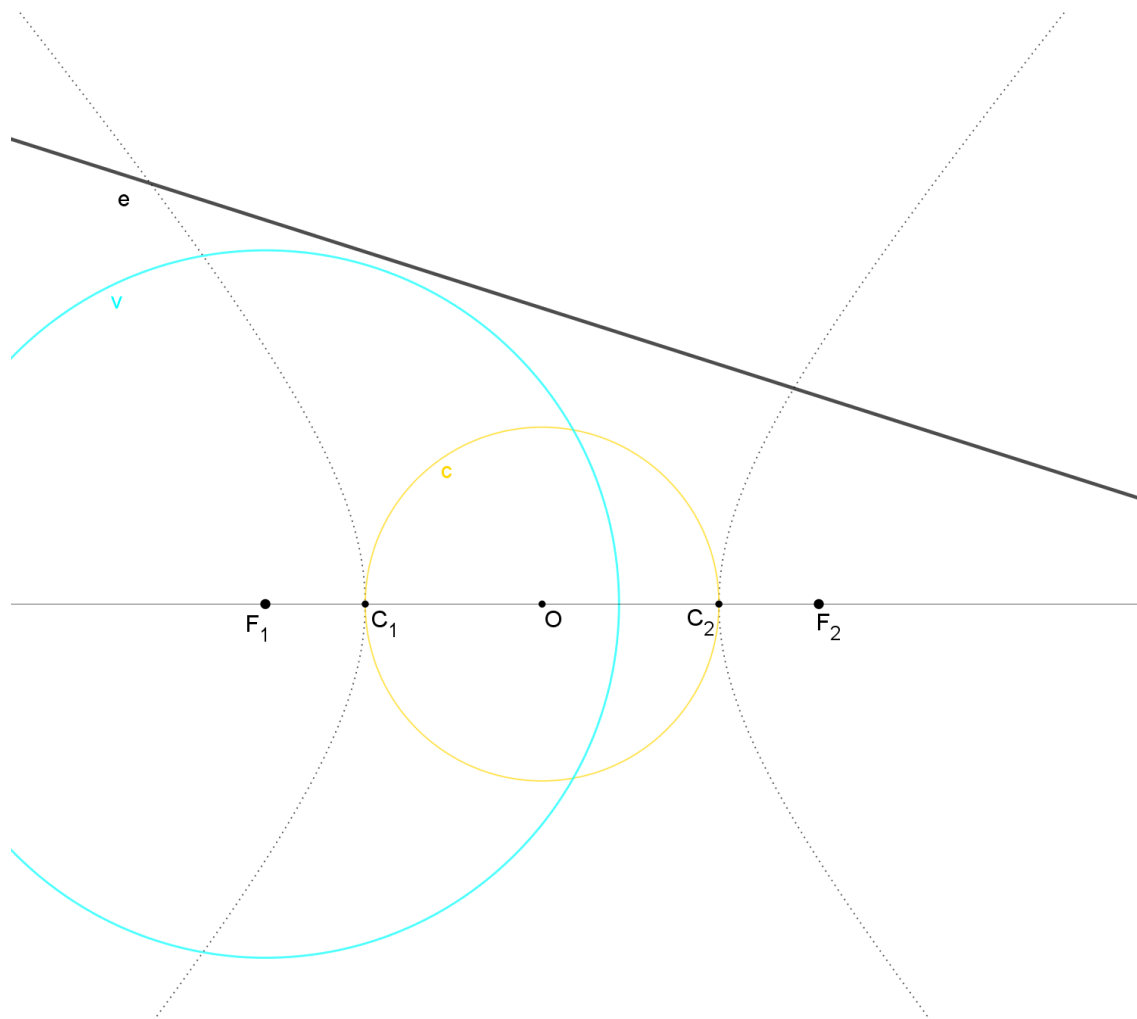
A szerkesztés vázlatos ismertetése

A szerkesztés menete igen hasonló az előzőhöz.

1. Induljunk ki például az F_1 középpontú vezérkörből, majd állítsunk merőlegest F_2 -ből az adott irányra. (Az adott irány párhuzamos egy leendő érintővel, ami a leendő fókális sugarak szögfelezője. Itt az F_2 -t tükrözzük a leendő érintőre.)
2. Ezen egyenes és a vezérkör metszéspontjai: V_1 és V_2 (Például V_1 az F_1 -en keresztül húzható egyik fókális sugár eleme. Az „új” definíció alapján a keresett E_1 érintési ponthoz tartozó kör V_1 -ben érinti a vezérkört.)
3. A V_1F_2 szakasz felezőmerőlegese az egyik keresett érintő: e_1 . (Érdekesség: a felezőpont a c körön nyugszik.)
4. A V_1F_1 fókális sugár kimetszi az érintési pontot: E_1 .
5. Ismételjük meg a 3-4. lépéseket a V_2 -re is: e_2 és E_2 .

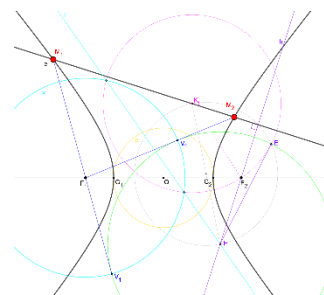


Adott egy hiperbola két fókusza és a $2a$ távolság, továbbá egyenes. Szerkesztendő a metszéspontok.



A szerkesztés vázlatos ismertetése

1. Vegyünk fel egy tetszőleges kört, amelynek K_t középpontja az egyenesen nyugszik és metszi a vezérkört.
2. Állítsunk merőlegest F_2 -ből az egyenesre: h . (Ez az összes olyan kör közös hatványvonala, amelyek átmennek az F_2 -n és a középpontjuk az e -n van. Keressük azon köröket, amelyek a vezérkört is érintik.)
3. Rajzoljuk meg a tetszőleges kör és a vezérkör hatványvonalát is. (Ezt a hatványvonalat kellene úgy „elmozgatni”, hogy érintse a tetszőleges kört vagy a vezérkört.)
4. Ez utóbbi hatványvonal és a h metszéspontja a H pont. (Az „új” definíció szerinti kör középpontját keressük. Az egyeneshez tartozó körök és a vezérkör hatványpontját találtuk most meg.)
5. Szerkesszünk érintőt a H -ból a tetszőleges körhöz (E), majd rajzoljunk ezzel a szakasszal mint sugárral egy kört.
6. Ez a kör két pontban metszi a vezérkört: V_1 és V_2 . (Ezek már a fokális sugarakhoz tartozó pontok.)
7. A V_1F_1 fokális sugár kimetszi az egyik metszéspontot az egyenesből: M_1 .
8. Megismételve az utolsó lépést V_2 -re az M_2 -höz jutunk.



2. Felületek, másodrendű felületek

Felületekről dióhéjban

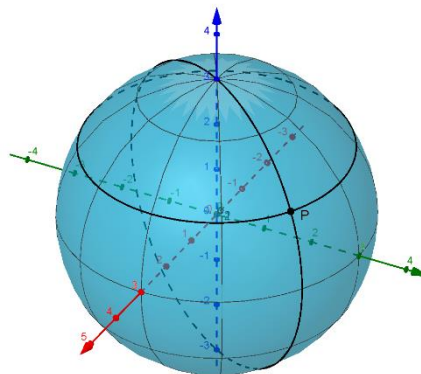
Definíció szemléletesen: egy görbe térbeli folyamatos mozgása során keletkező pontok összessége megengedve, hogy a görbe a mozgás során „változhasson”

Analitikus definíció: bizonyos feltételeknek eleget tevő $F: I \times J \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény

(Részletesen és precízen lásd a Matematika II. tantárgyban.)

Tipikus megadási módok:

- paraméteres alak – $F(u, v) = (\overbrace{3 \cdot \cos(u) \cdot \cos(v)}^x, \overbrace{3 \cdot \sin(u) \cdot \cos(v)}^y, \overbrace{3 \cdot \sin(v)}^z)$
 $u, v \in [0, 2\pi]$
- implicit alak (egyenlet) – $x^2 + y^2 + z^2 = 9$



Felületek jellemző adatai

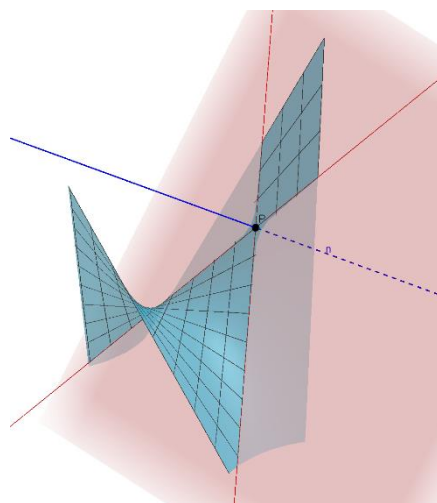
Paramétervonal: az egyik paramétert „lefixálva”, a másik paramétert „mozgatva” kapott görbe

Pontbeli érintősík: a paramétervonalak érintői által felfesztett sík
(vagy: minden felületi görbe adott pontbeli érintői által meghatározott sík)

Pontbeli normális: az érintősíkra merőleges egyenes/vektor

Felületi pontok típusai

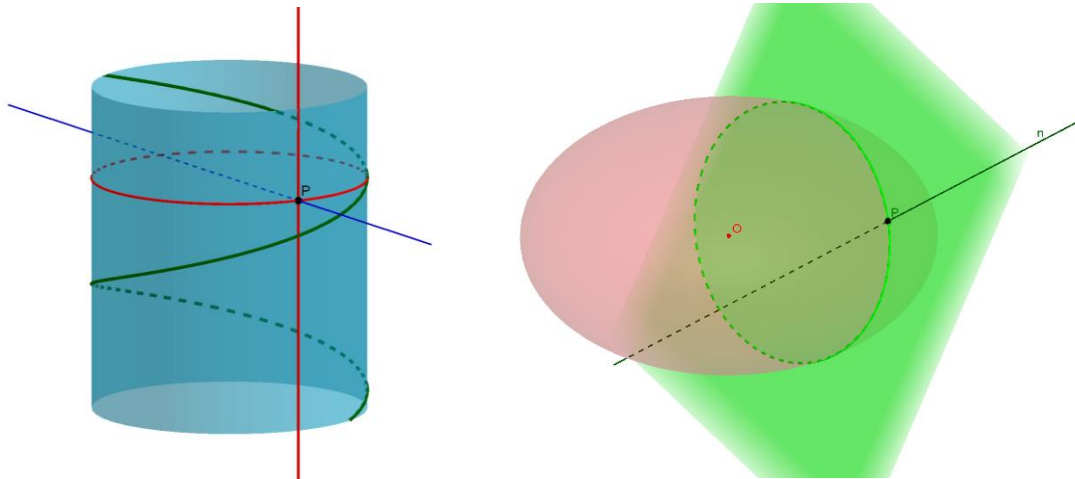
- reguláris:
- szinguláris:



Felületi görbék

Görbe, melynek minden pontja a felületre is illeszkedik.

- síkmetszet
speciális síkmetszet: normálmetszet
- egyéb



Felületi pontok jellemzése Gauss-görbülettel

Ha egy felület egy pontjában létezik az érintősík és a normális, akkor a normálmetszetek adott pontbeli görbületeit tekintve létezik egy legkisebb és egy legnagyobb görbületű.

Ezeket a görbületi értékeket *főgörbületeknek*, a síkmetszeteket pedig *főmetszeteknek* nevezzük. A síkmetszeteket jellemző érintővektorokat főirányoknak hívjuk, és ezek a vektorok egymásra merőlegesek.

Megjegyzés: Megengedett, hogy a két főgörbület egyenlő legyen. (Lásd például a gömb bármely felületi pontját.)

Gauss-görbület = a főgörbületek szorzata

(Minkowski-görbület = a főgörbületek számtani közepe)

Felületi pontok osztályozása

- elliptikus, ha a Gauss-görbület pozitív érintősík:
- parabolikus, ha a Gauss-görbület nulla (de a Minkowski-görbület nem zérus) érintősík:
- hiperbolikus, ha a Gauss-görbület negatív érintősík:

Példák

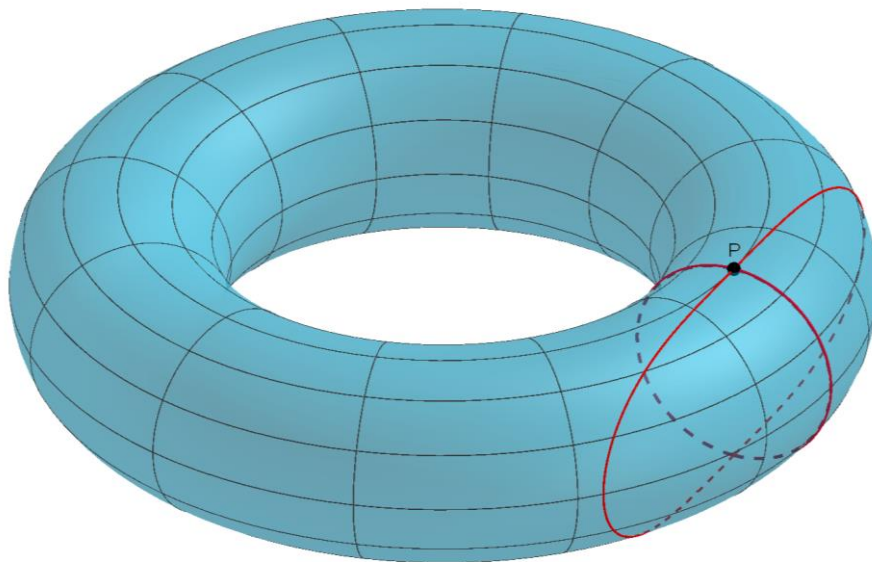
- felületek, amelyeknek minden pontja ugyanolyan típusú

henger:

gömb:

nyeregfelület:

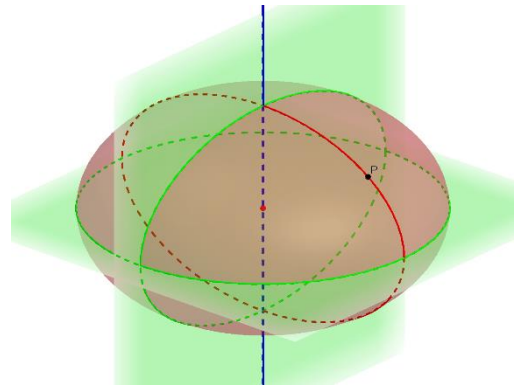
- felület, amelynek van minden típusú pontja – tórusz
a pontjainak osztályozása:



További lényeges, a felülethez köthető térelemek

Szimmetriasík (ha létezik)

Középpont (ha létezik)

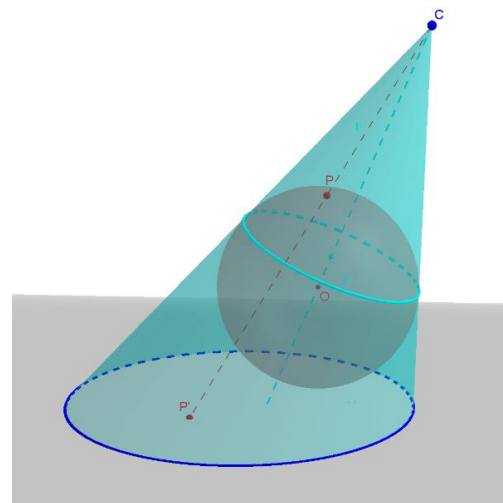
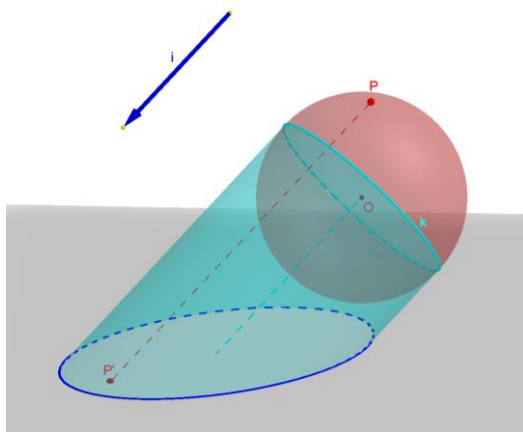


Kontúrpont: kontúrpontban a felületi érintősík vetítősík.

Kontúrgörbe: a kontúrpontok összessége.

Kontúrsík: akkor létezik, ha a kontúrgörbe síkgörbe.

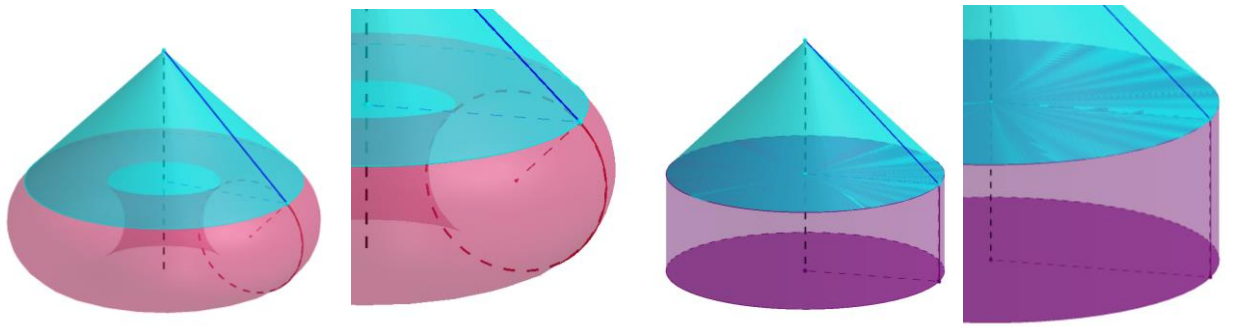
Képkontúr:



Önárnyékhatár-görbe – az elve ugyanaz, mint a kontúré!

Fontos megjegyzés a kontúrgörbékhez

Ha a két felület simán (az érintősík a csatlakozási pontban azonos) csatlakozik, akkor a kontúrgörbe folytonos.



Legfontosabb felületi osztályok

1. *Forgásfelület*

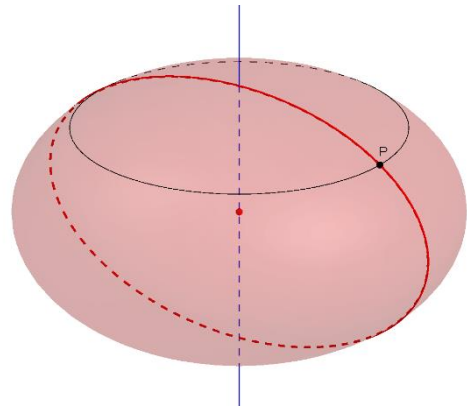
egy görbe egy adott tengely körüli forgatásával előállítható

meridiángörbe:

meridiánmetszet:

paralelkör:

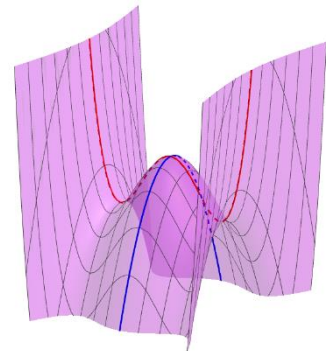
Példák:



2. *Transzlációs felület*

egy görbét egy másik görbe mentén mozgatunk

Példák:

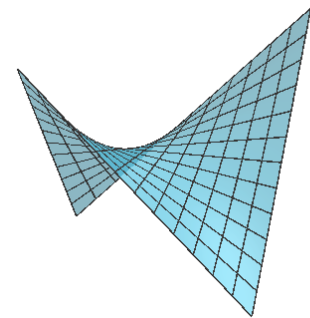


3. *Vonalfelület*

a felület egyenesekkel előállítható;
minden pontján át felvehető a felületre illeszkedő egyenes

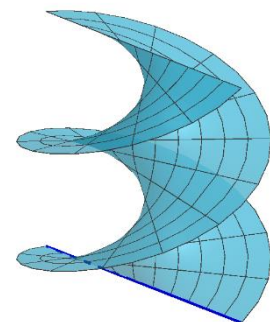
Ha a vonalfelület minden pontja parabolikus, akkor *kifejthető*.
(3 típus lehetséges: kúp, henger, térgörbe érintőegyeneseiből álló felület)

Példák:



4. *Csavarfelület* – egy görbét egy csavargörbe mentén mozgatunk; csavarmozgással előállítható felület

Példák:



Másodrendű felületek

Algebrai felület: az egyenlete polinomfüggvénnyel leírható. Egy n -edrendű felület síkmetszete legfeljebb n -edrendű síkgörbe.

Másodrendű felület: az egyenlete másodfokú.

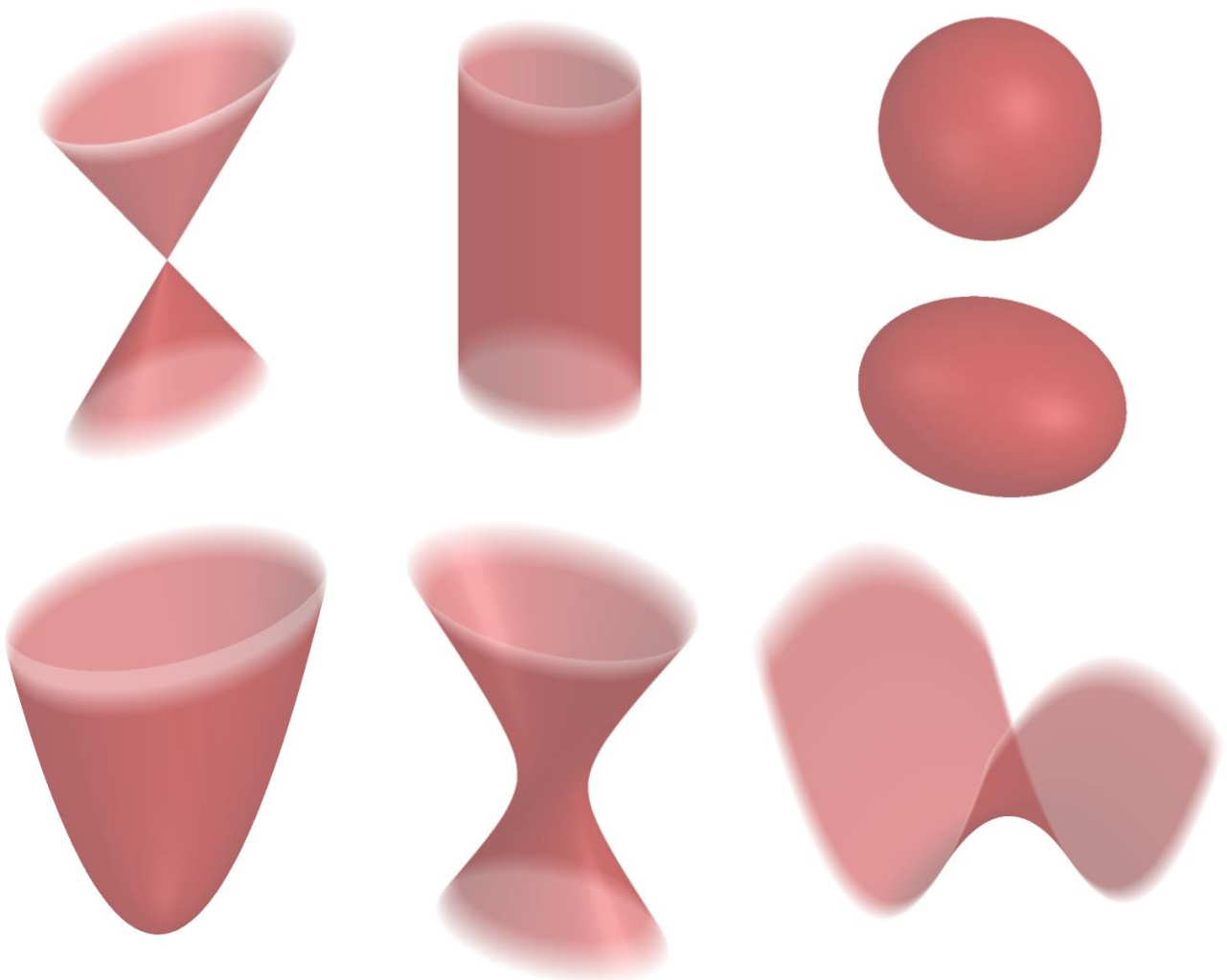
Nem elfajuló másodrendű felületek

- ellipszoid, gömb
- elliptikus paraboloid ($\rightarrow$ forgásparaboloid)
- egyköpenyű hiperboloid ($\rightarrow$ forgáshiperboloid)
- hiperbolikus paraboloid /nyeregfelület
- kétköpenyű hiperboloid

Elfajuló másodrendű felületek

- kúp ($\rightarrow$ körkúp)
- elliptikus henger ($\rightarrow$ körhenger)
- hiperbolikus henger
- parabolikus henger

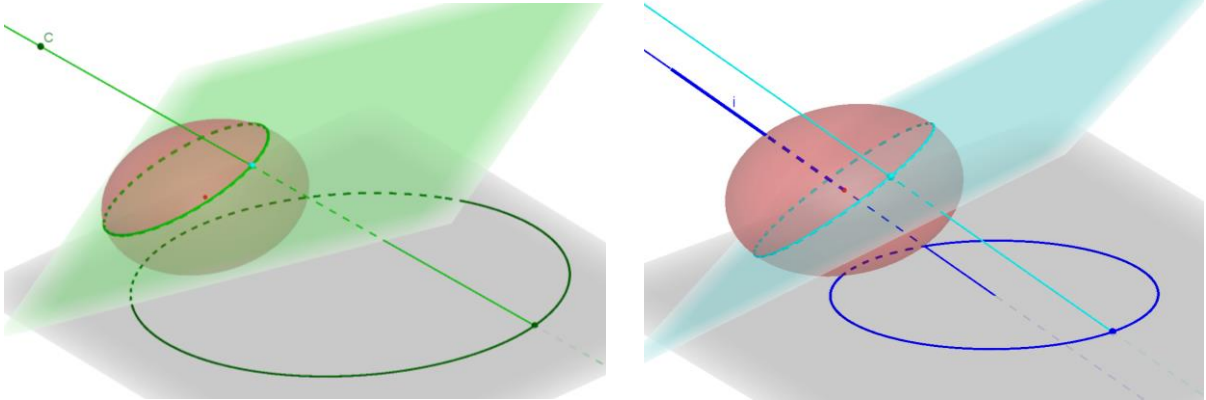
továbbá pont, egyenes, sík, metsző síkpár, párhuzamos síkpár



Másodrendű felület polársíkja (külső pont esetén)

A tér tetszőleges pontjából húzzunk érintőket a felülethez. Ekkor egy kúpfelületet kapunk, amely érinti a felületet, az érintési pontok pedig egy másodrendű görbét adnak. Ezen görbe síkja a külső pont polársíkja. (Azaz az érintési pontok általi görbe a felület egy síkmetszete!)

Ha ez a pont végtelen távoli, akkor a kapott másodrendű görbe középpontja a felület középpontja, és ekkor az érintőkúp érintőhengerré válik.



Miért jó? → A másodrendű felületek kontúrgörbéi másodrendű görbék! Párhuzamos vetítés esetén áthaladnak a felület középpontján.

Sőt, az árnyékszerkesztés esetén is párhuzamos fénysugarakkal dolgozunk, ezért a másodrendű felületek önárnyékhatár-görbéi szintén másodrendű görbék.

3. Henger ábrázolása

A félév során csak körhengerek ábrázolására szorítkozunk.

Körhenger származtatása

Szintetikusan:

egyenes körhenger: egy egyenes körül megforgatunk egy azzal párhuzamos egyenest.

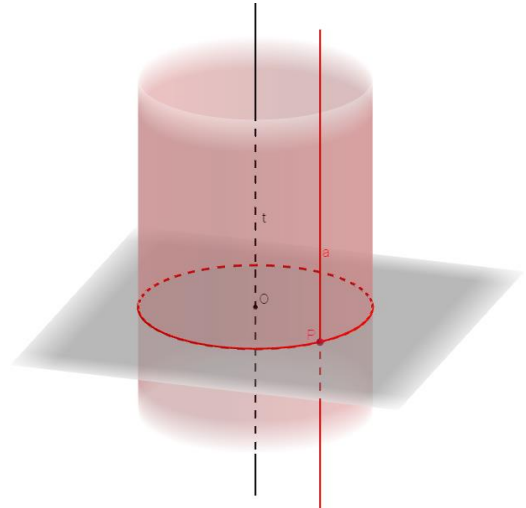
ferde (és egyenes) körhenger: egy adott kör kerületi pontjaiban vett, adott irányú egyenesek összessége (amely irány nem párhuzamos a kör síkjával).

Analitikusan (z tengelyű, r sugarú végtelen egyenes körhenger):

paraméteresen: $F(u, v) = (r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u), v)$

$u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$

implicit egyenlettel: $x^2 + y^2 = r^2, z \in \mathbb{R}$



Elhelyezés a felületek rendszerében:

- másodrendű felület
- forgásfelület
- vonalfelület (kifejthető)
- translációs felület

Alapvető kapcsolódó térelemek

tengely:

alkotók:

alapkör:

fedőkör:

magasság:

szimmetriasíkok:

Felületi pontok, pontbeli érintő sík

- Minden pontja parabolikus.
- Pontbeli érintő sík előállítás:

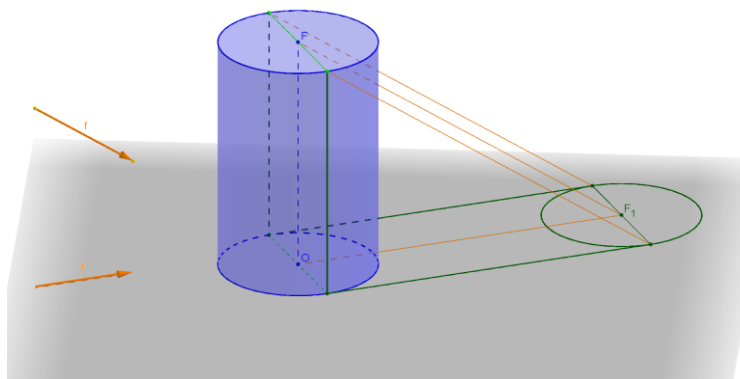
Lehetséges síkmetszetek

- kör
- ellipszis
- párhuzamos egyenespár
- egyetlen egyenes

Kontúrgörbe, önárnyékhátér-görbe

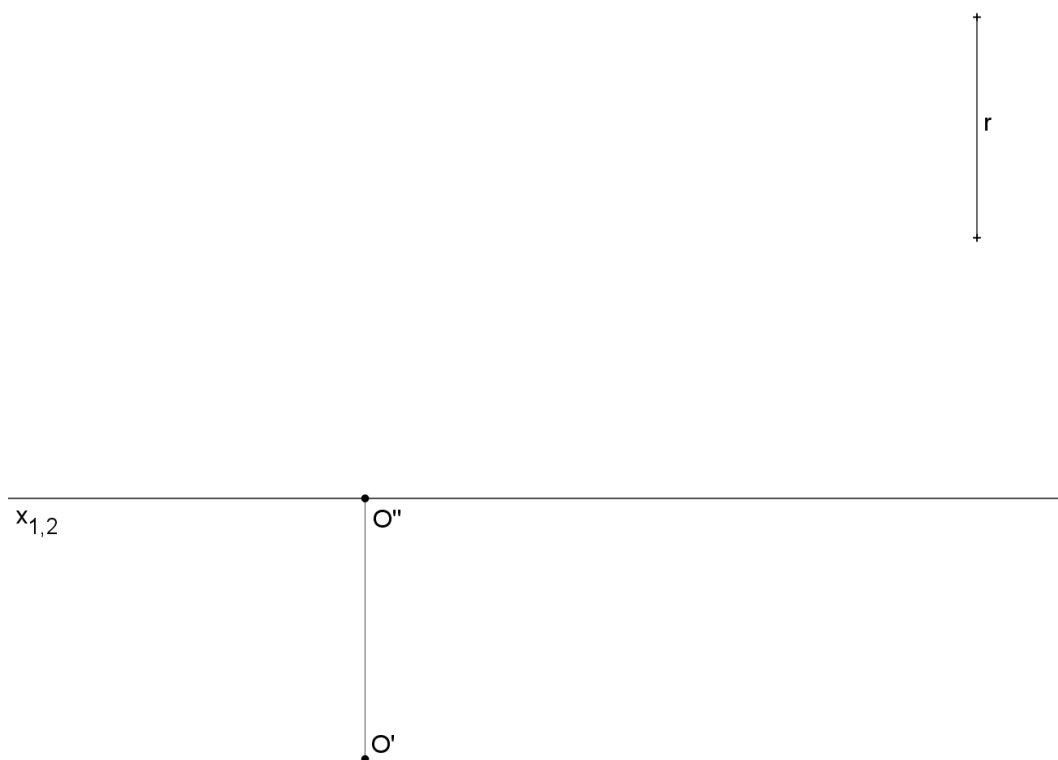
Végtelen hengert tekintve, a kontúrgörbe/önárnyékhátér-görbe párhuzamos és centrális vetítés esetén

- egy alkotópár (síkjuk a kontúrsík) vagy
- speciális esetben kör.

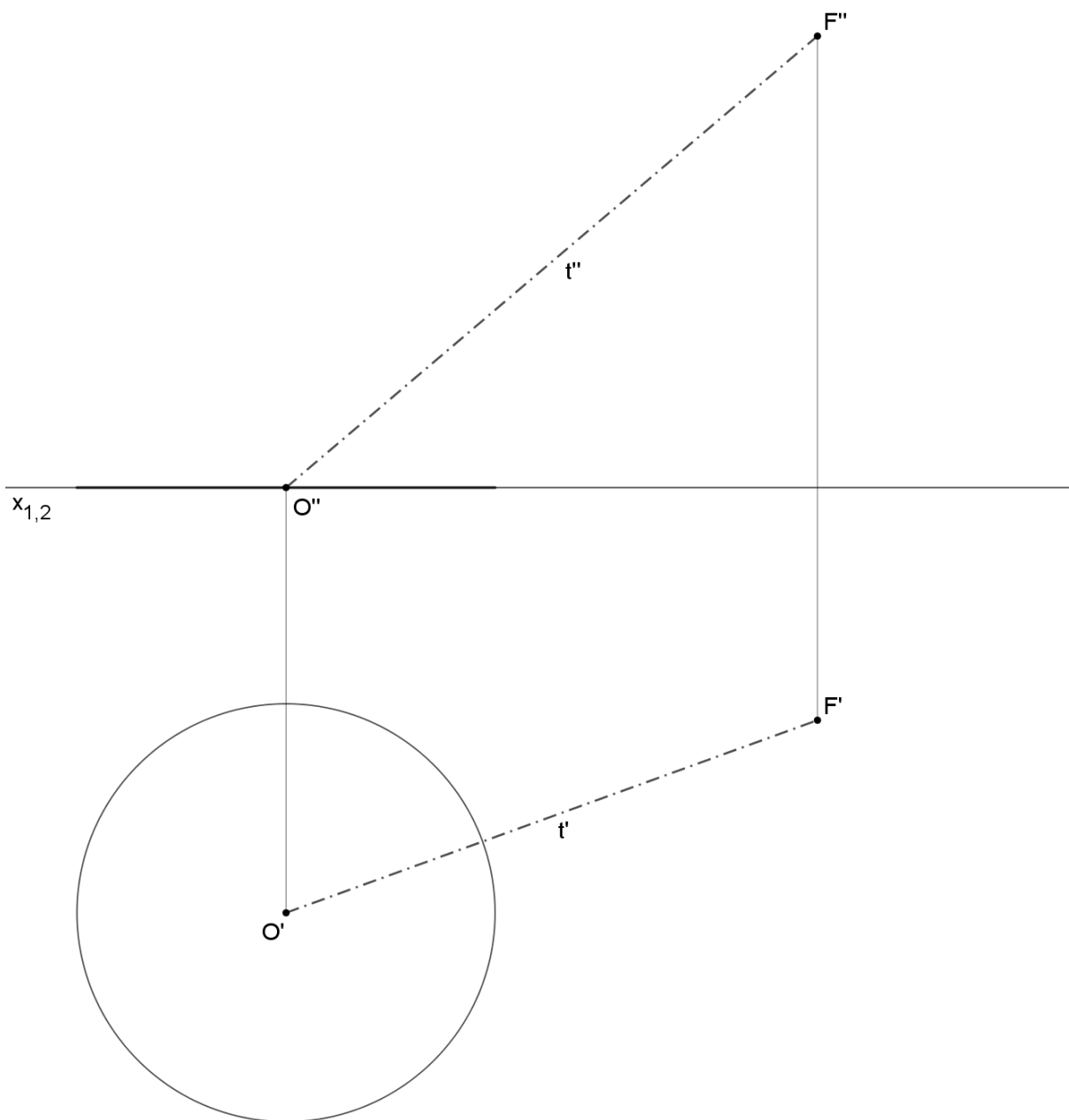


Alapvető szerkesztések

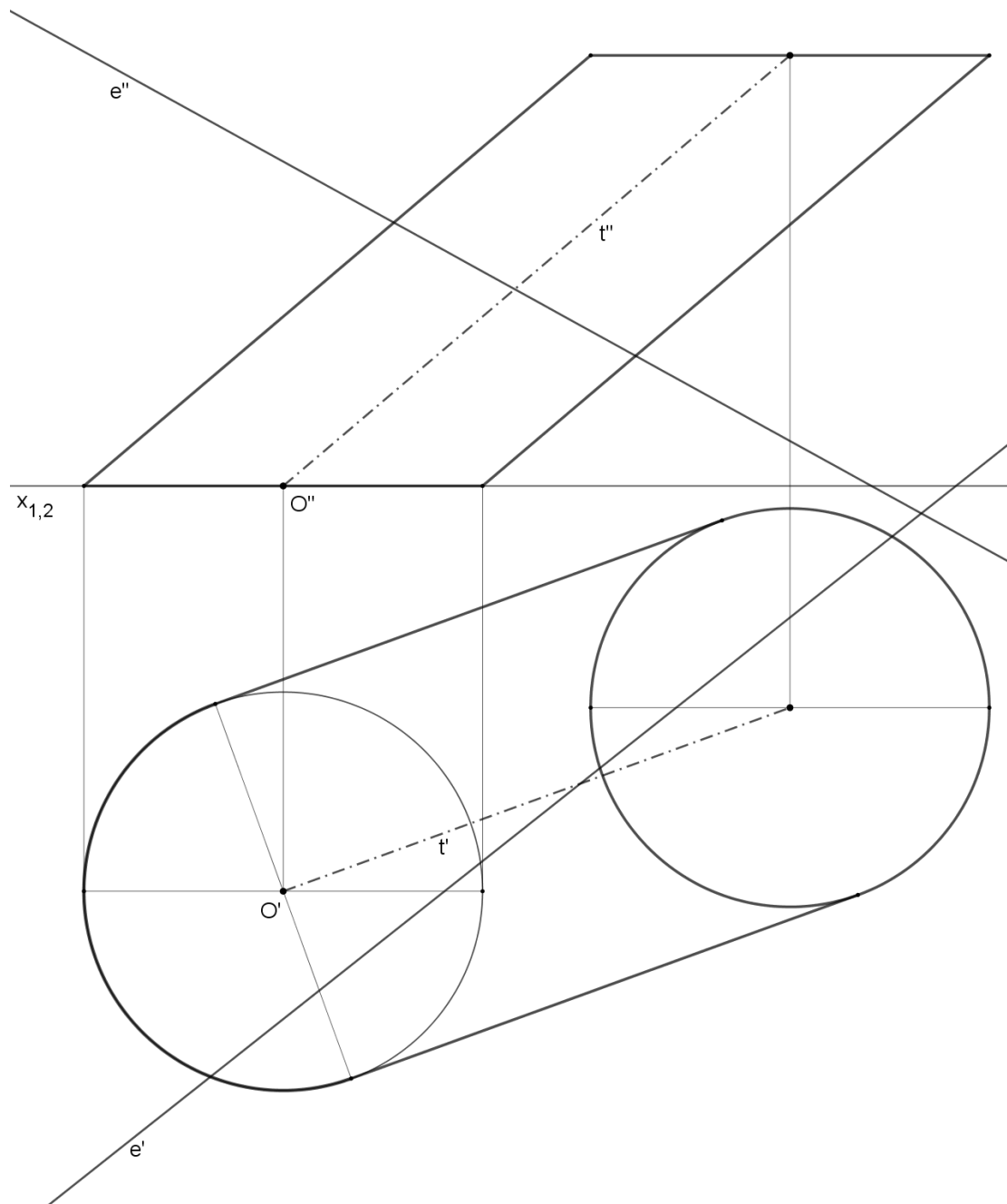
Szerkesszünk egy, az első képsíkon álló egyenes körhengert Monge-projekcióban, ha ismert a középpontja, alapkörének sugara, valamint a magassága az alapkör sugarának kétszerese! Szerkesszük meg egy tetszőleges pontját, és abban az érintősíkot is!



Házi feladat: Szerkesszük Monge-projekcióban egy olyan ferde körhengert, melynek ismert a tengelye (szakaszként) és az alapköre!

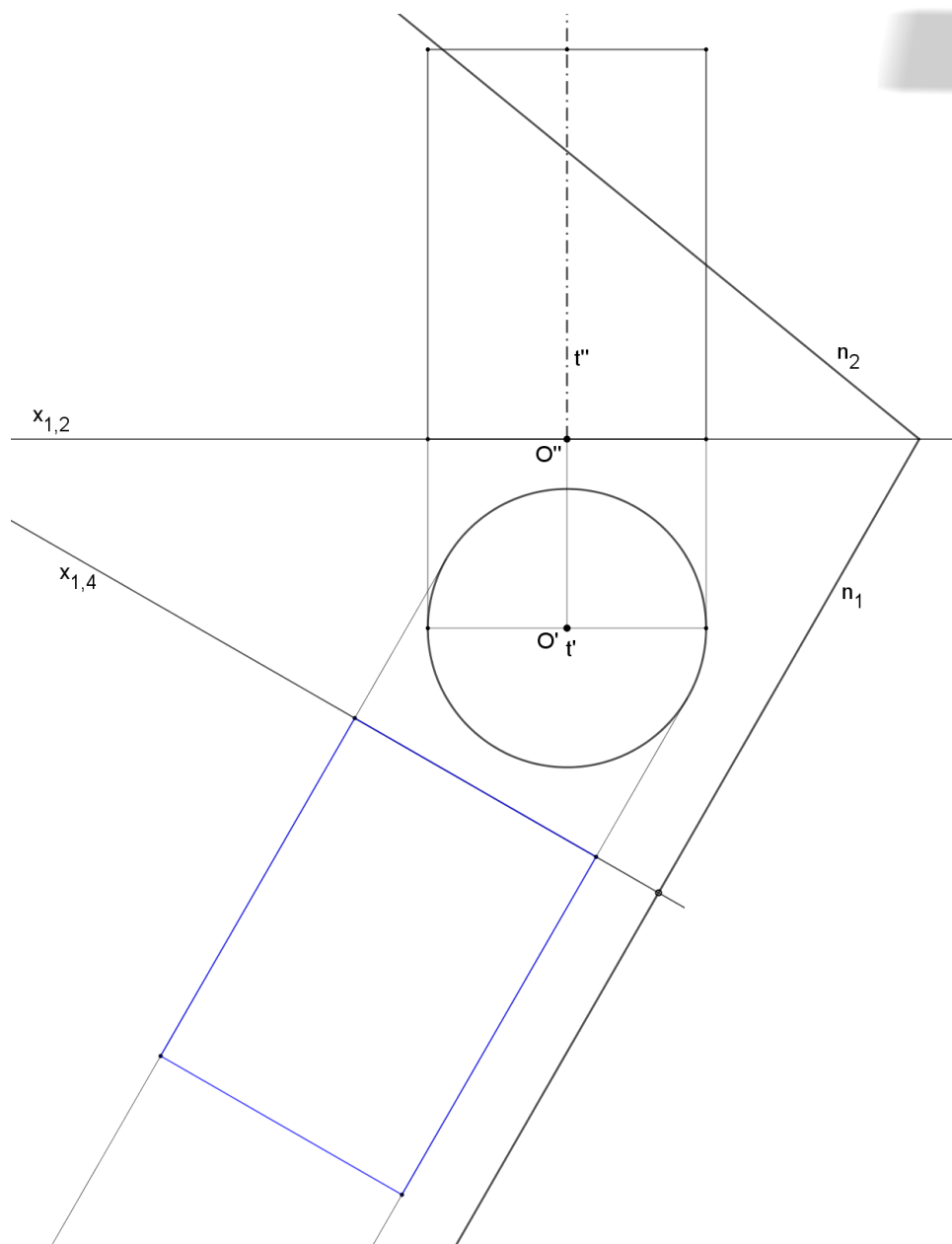
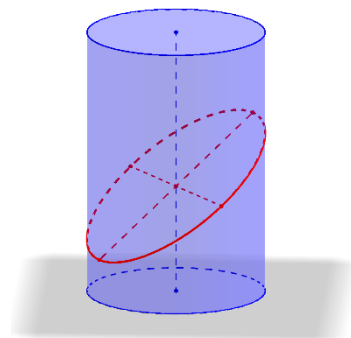


Adott egy ferde körhenger mindkét képe Monge-projekcióban, valamint egy egyenes két képével. Szerkesztendő a henger és az egyenes metszéspontjai.

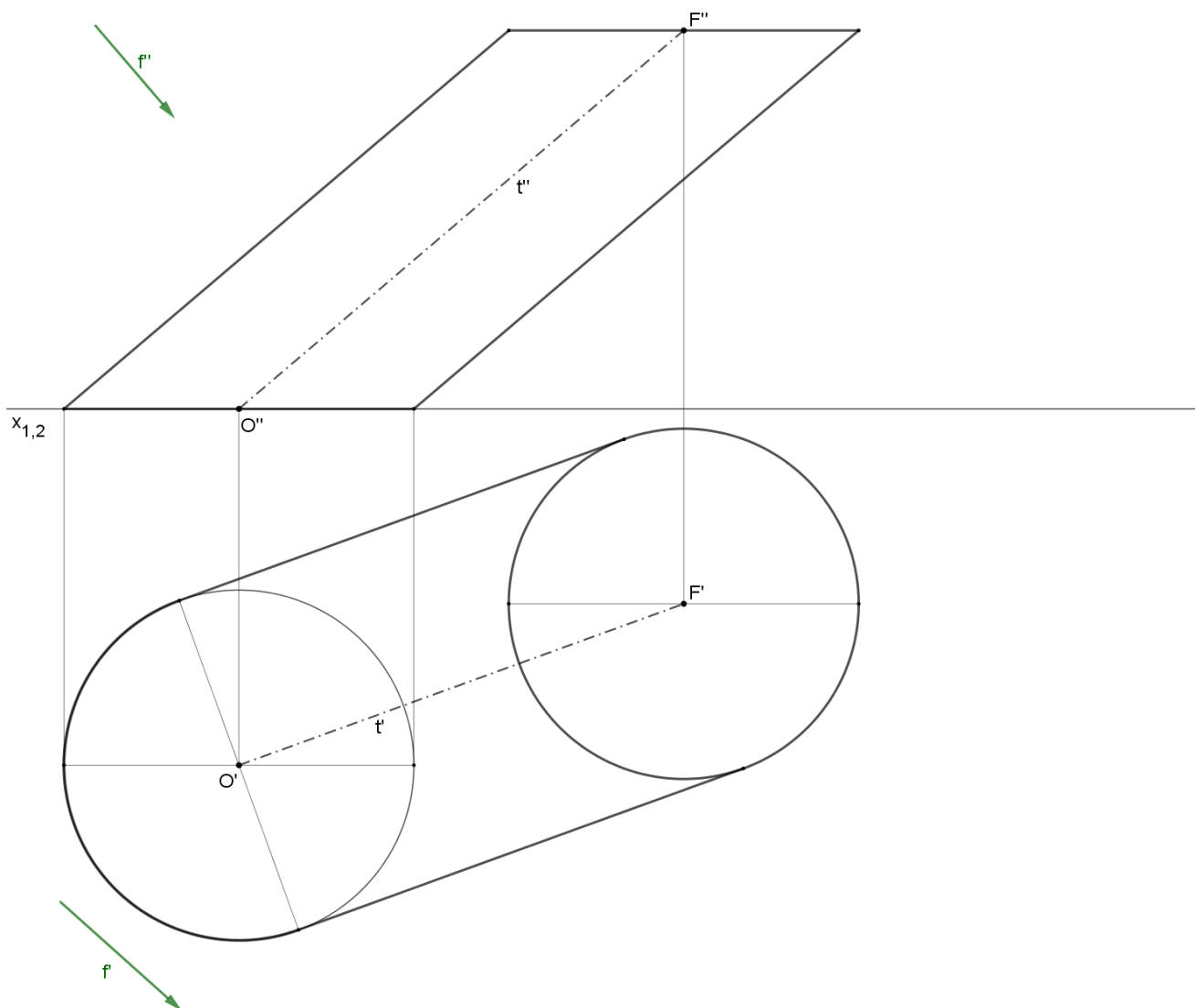


Adott egy egyenes körhenger Monge-projekcióban és egy dőlt sík.
Szerkesztendő a síkmetszet!

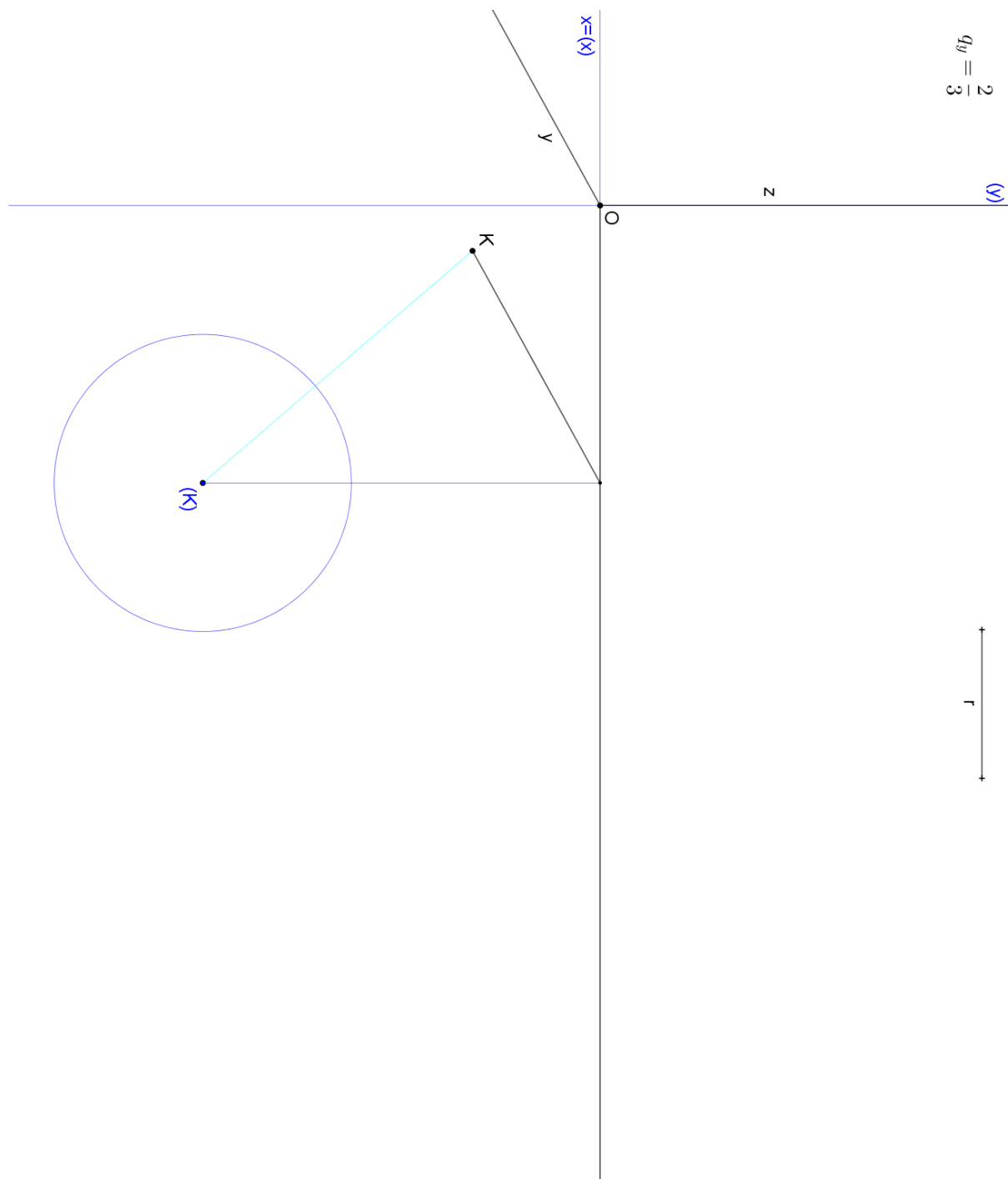
(Szerkesztendő továbbá a síkmetszet egy tetszőleges pontjában az érintőegyenes is.)



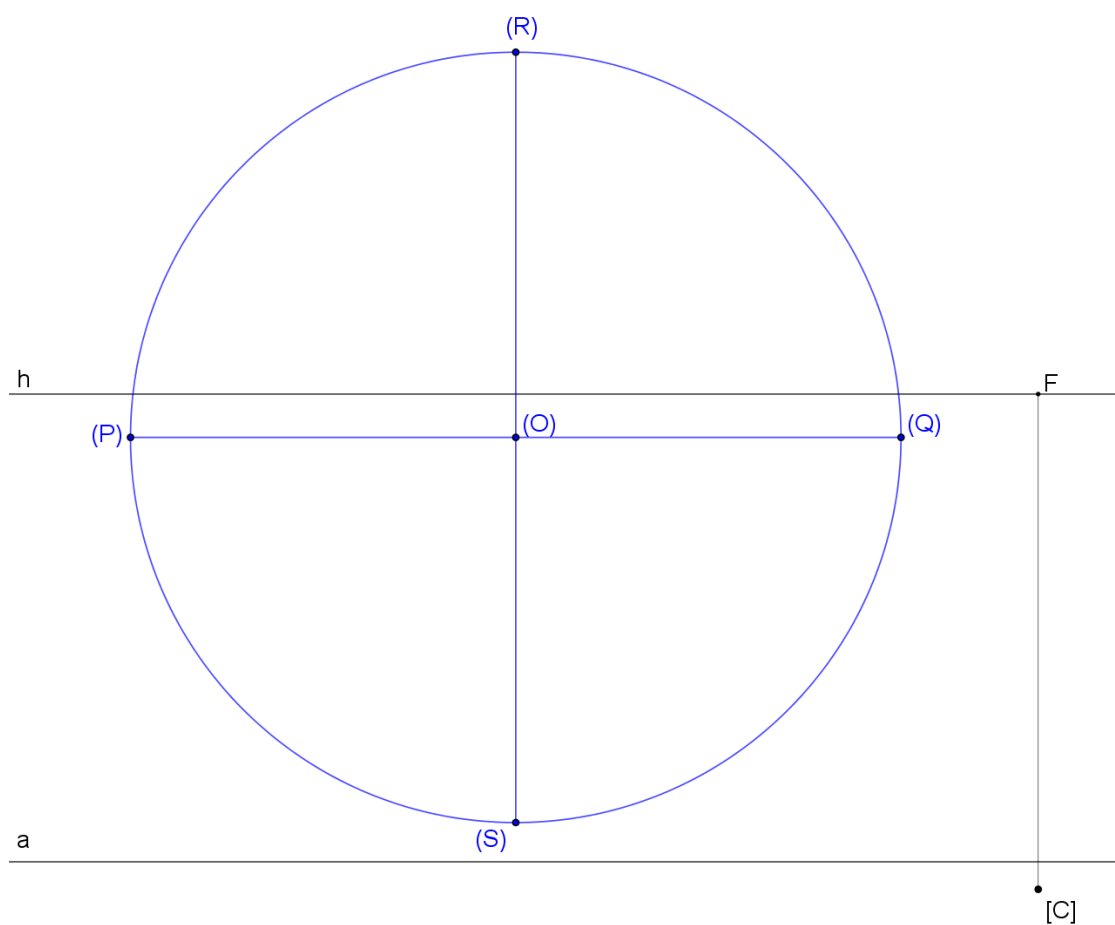
Monge-projekcióban adott egy ferde körhenger és egy fénysugárirány. Szerkesszük meg a henger önárnyékhatár-alkotóit és az első képsíkra vetett árnyékát!



Szerkesszük frontális axonometriában egy, az $[x,y]$ koordinátasíkon álló egyenes körhengert, ha ismert az alapkör középpontja, sugara és a henger magassága az alapkör sugarának háromszorosa!



Ábrázoljunk perspektívában egy olyan végtelen egyenes körhenger alapsík fölé eső részét, amelynek ismert az alapsíkban lévő alapköre!



4. Kúp ábrázolása

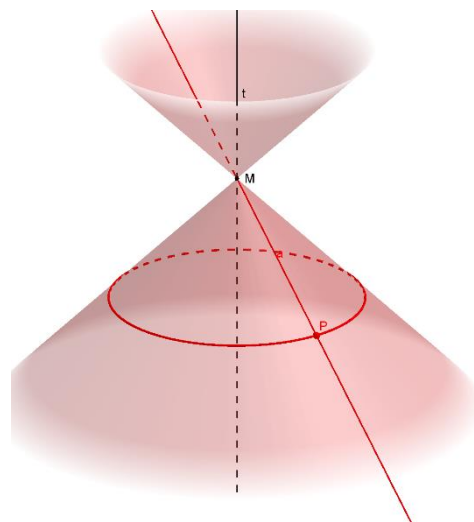
A félév során csak körkúpok ábrázolására szorítkozunk.

Körkúp származtatása

Szintetikusan:

egyenes körkúp: egy egyenes körül megforgatunk egy azt metsző, de arra nem merőleges egyenest.

ferde (és egyenes) körkúp: egy adott kör kerületi pontjain és egy adott ponton áthaladó egyenesek összessége (a pont nincs benne a kör síkjában).



Analitikusan (z tengelyű, r sugarú végtelen egyenes körkúp, amelynek „magassága” m):

paraméteresen:

$$F(u, v) = ((1 - v) \cdot r \cdot \cos(u), (1 - v) \cdot r \cdot \sin(u), m \cdot v) \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$$

implicit egyenlettel: $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{(z-m)^2}{m^2} = 0$

Elhelyezés a felületek rendszerében:

- másodrendű felület
- forgásfelület
- vonalfelület (kifejthető)

Alapvető kapcsolódó térelemek

csúcspont:

tengely:

alkotók:

alapkör:

magasság:

szimmetriasíkok:

Felületi pontok, pontbeli érintő sík

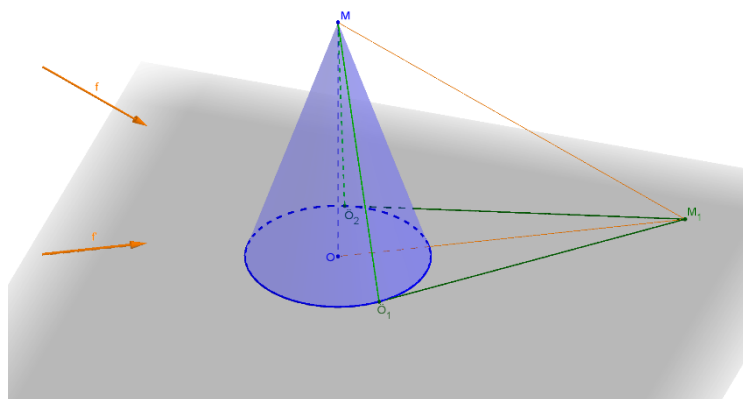
- A csúcspontján kívül minden pontja parabolikus. (A csúcspont szinguláris pont.)
- Pontbeli érintő sík előállítás:

Lehetséges síkmetszetek

- kör
- ellipszis
- parabola
- hiperbola
- metsző egyenespár
- egyetlen egyenes
- egyetlen pont

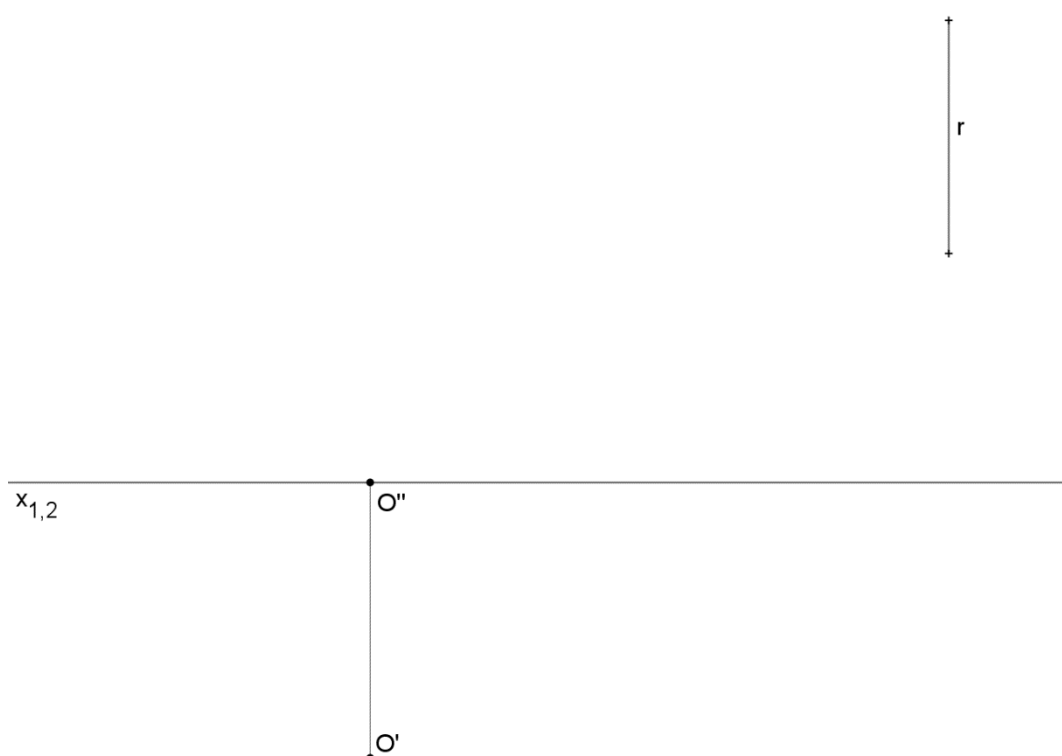
Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

Végtelen kúpot tekintve, a kontúrgörbe/önárnyékhatár-görbe párhuzamos és centrális vetítés esetén egy alkotópár (síkjuk a kontúrsík).

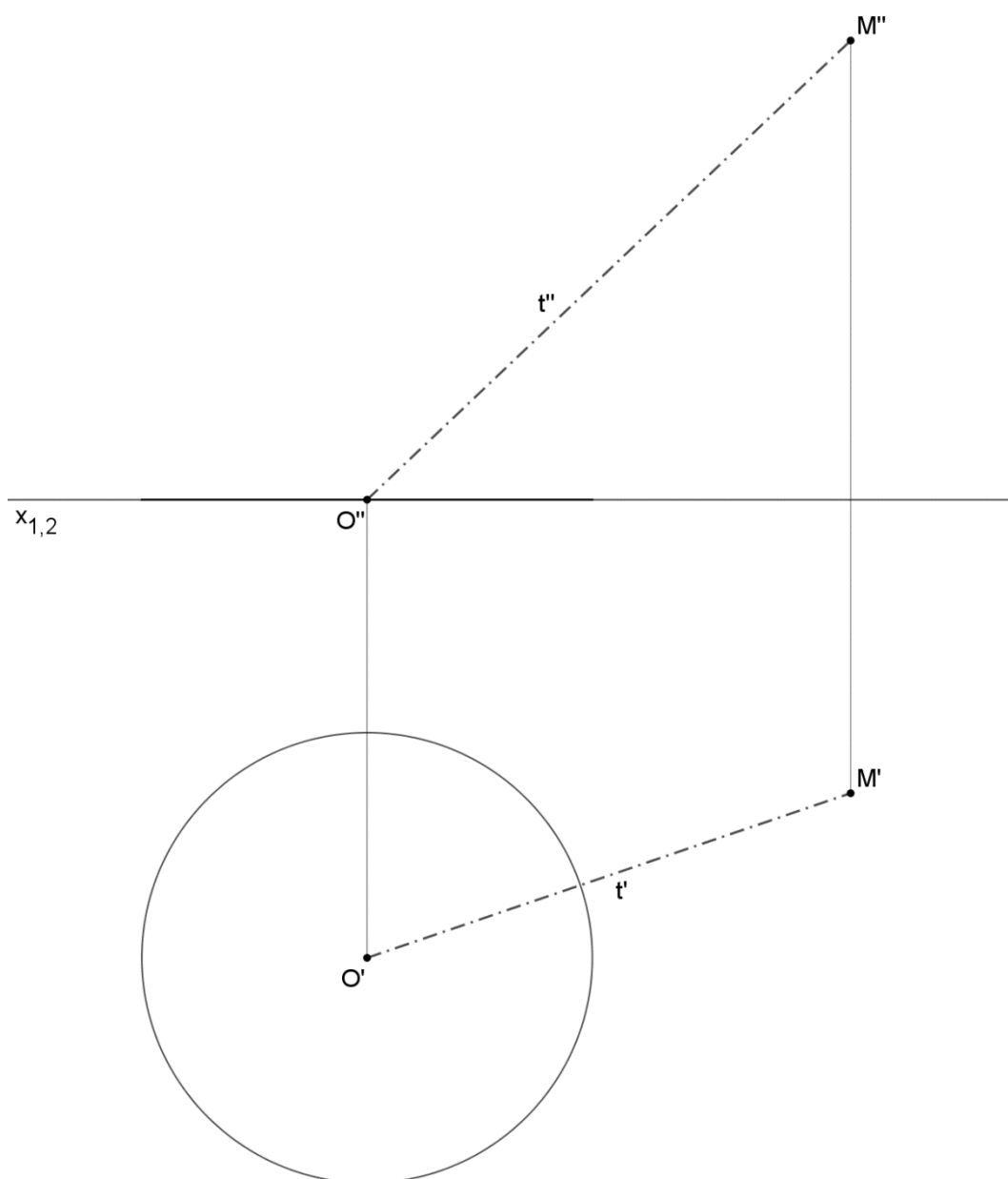


Alapvető szerkesztések

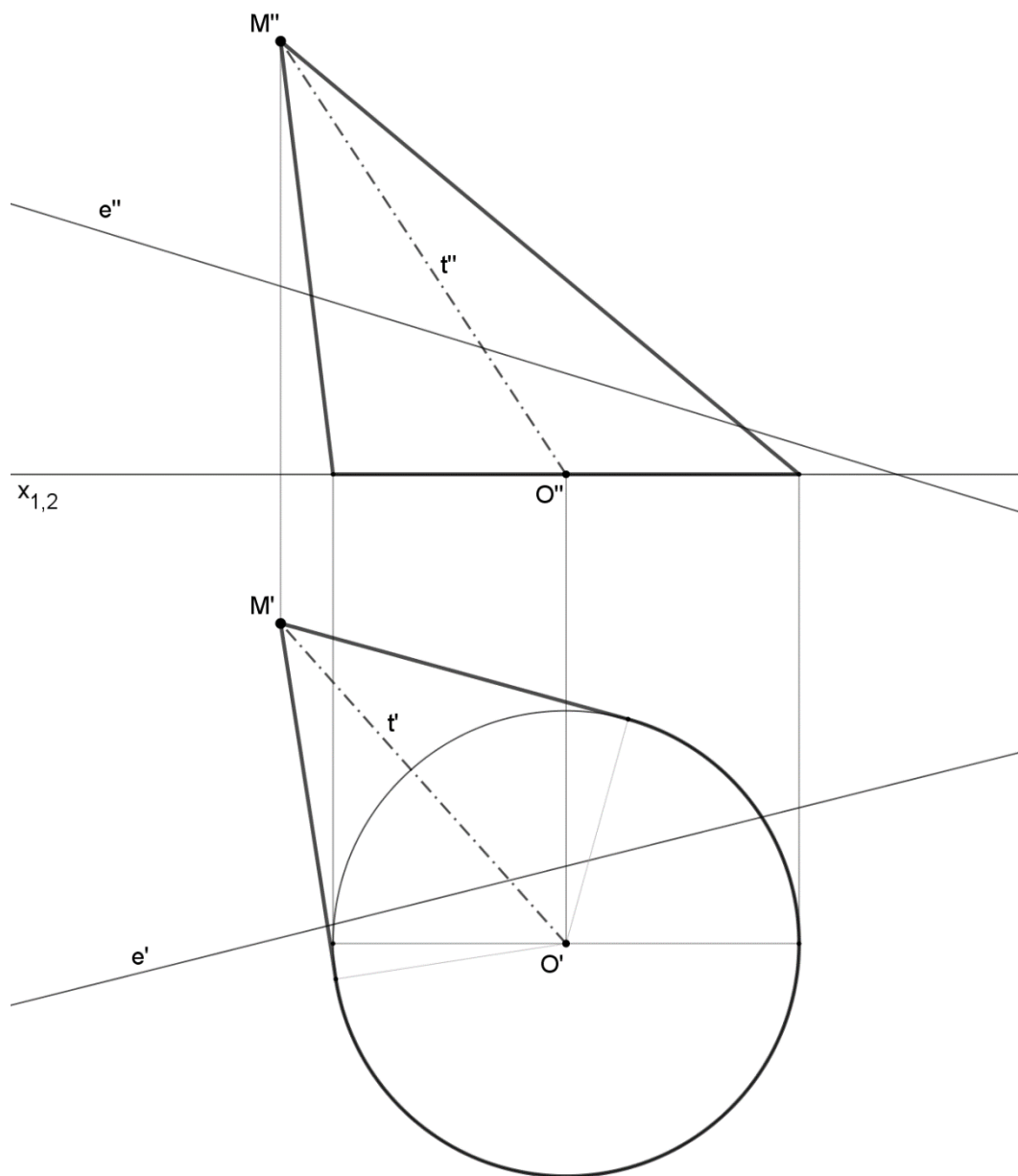
Szerkesszünk egy, az első képsíkon álló egyenes körkúpot Monge-projekcióban, ha ismert a középpontja, alapkörének sugara, valamint a magassága az alapkör sugarának kétszerese! Szerkesszük meg egy tetszőleges pontját, és abban az érintősíkot is!



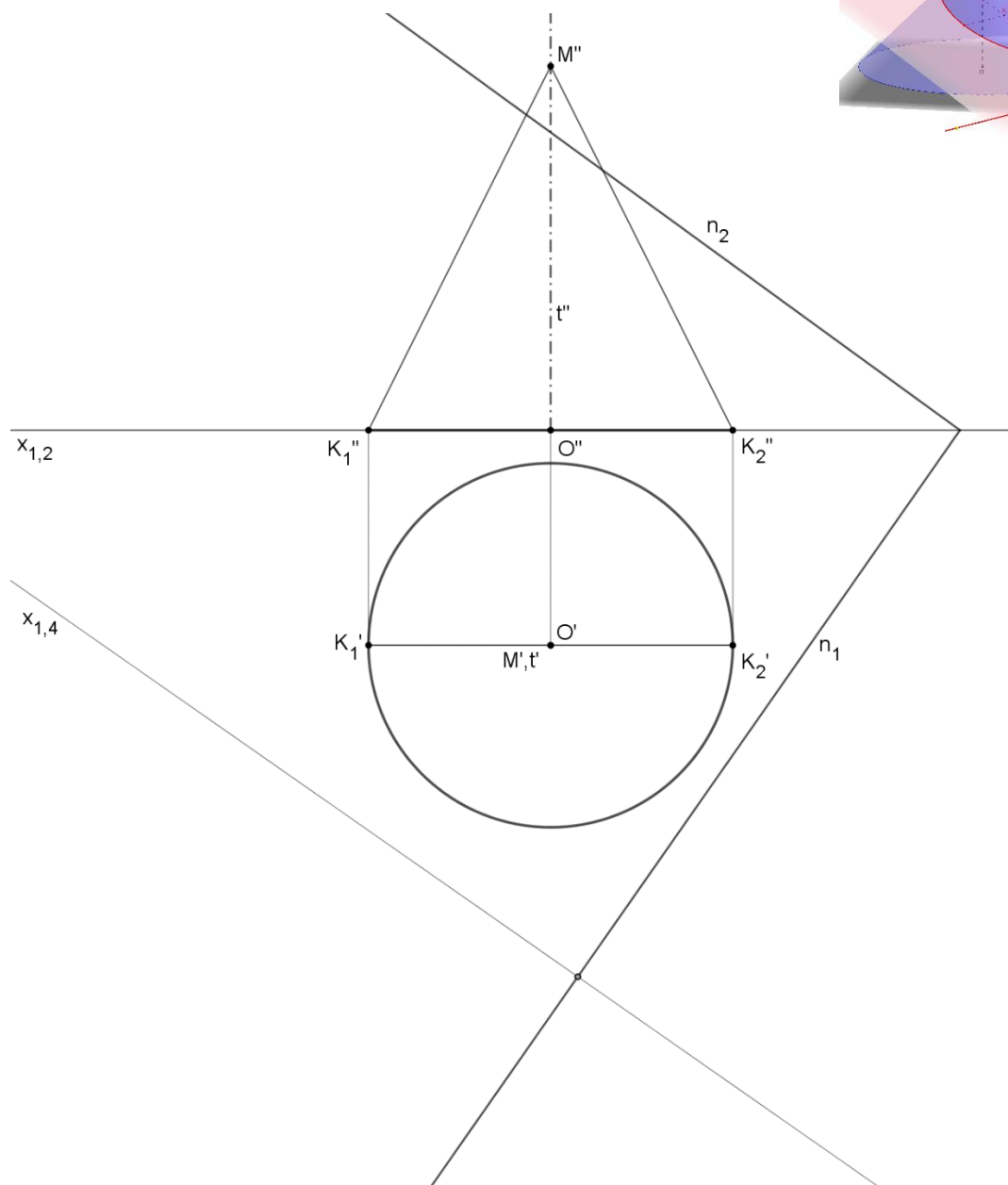
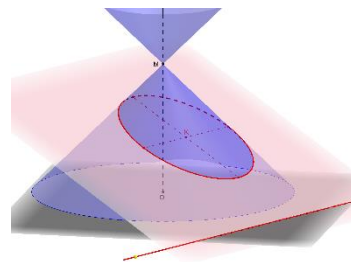
Szerkesszünk Monge-projekcióban egy olyan ferde körkúpot, melynek ismert a tengelye (szakaszként) és az alapköre!



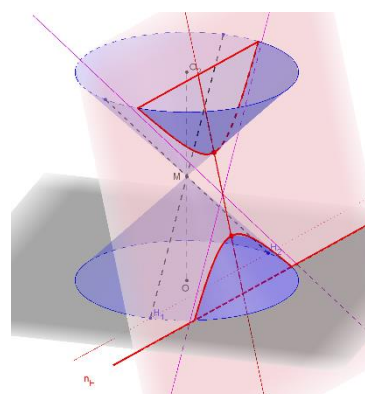
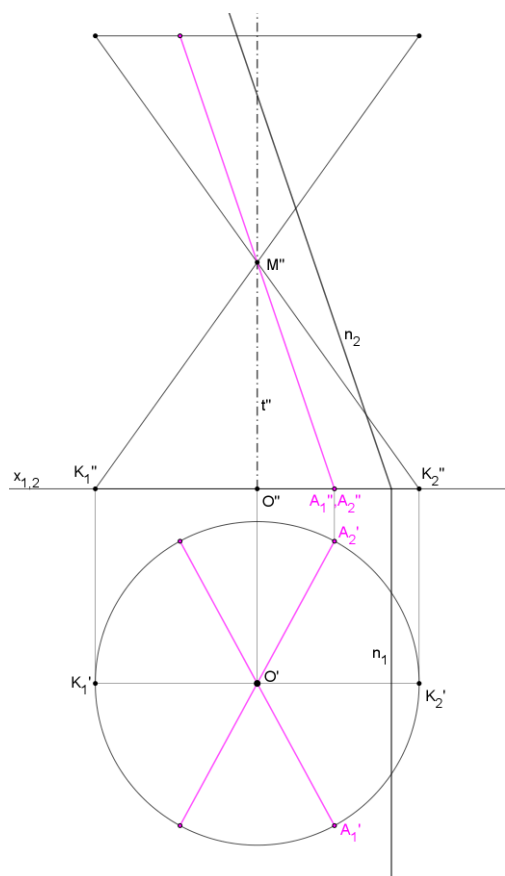
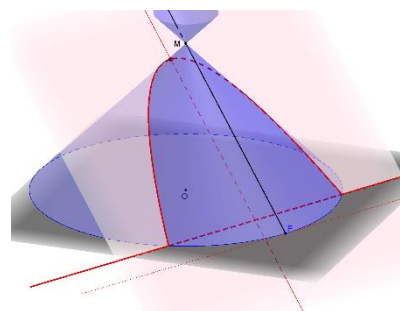
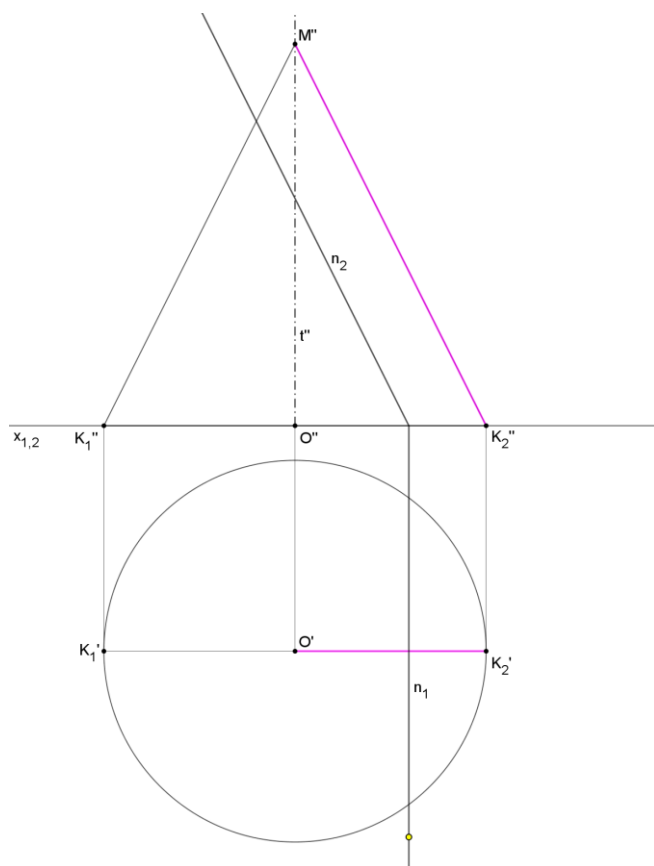
Házi feladat: Adott egy ferde körkúp mindkét képe Monge-projekcióban, valamint egy egyenes két képével. Szerkesztendő a kúp és az egyenes metszéspontjai.



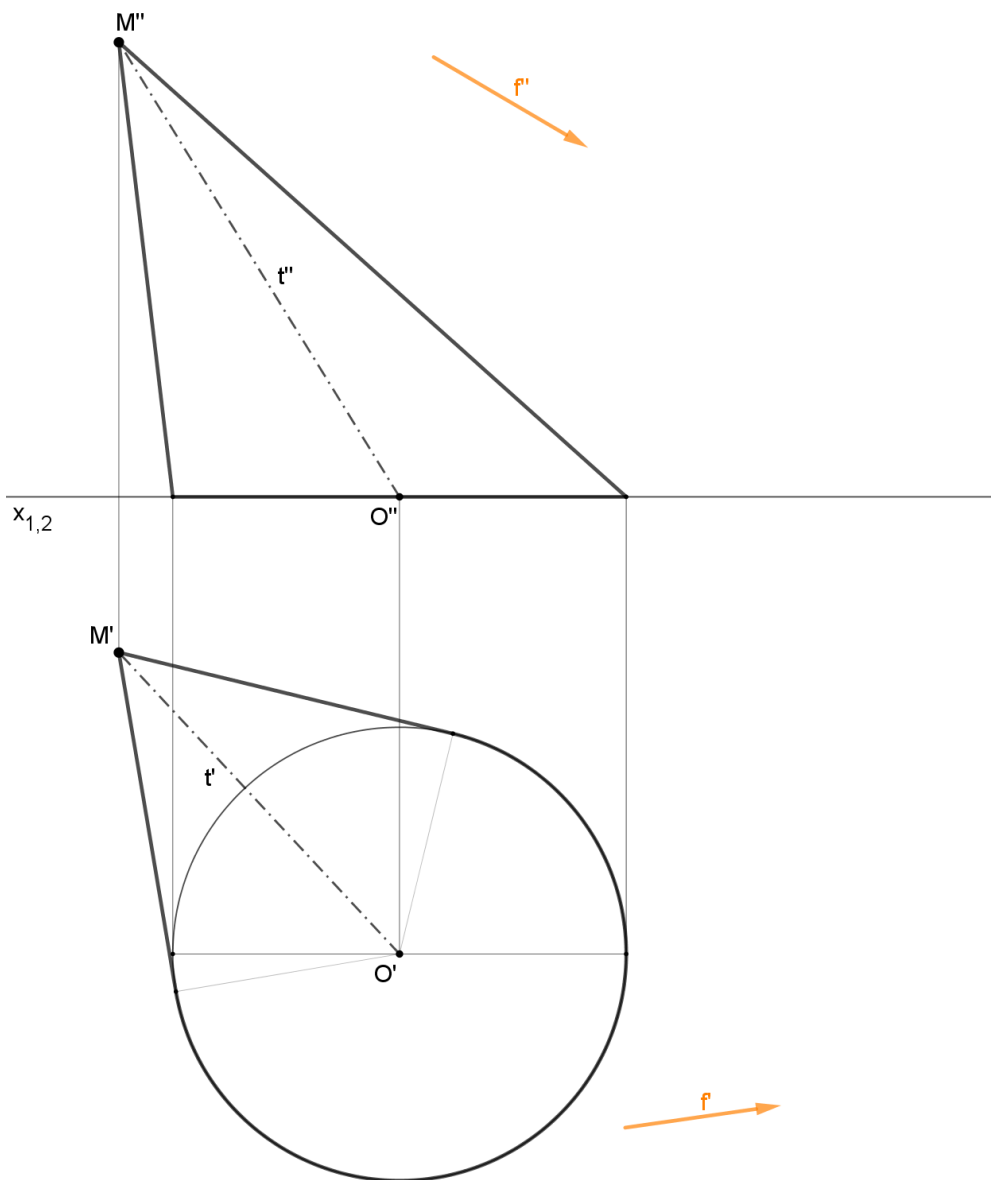
Adott egy egyenes körkúp Monge-projekcióban és egy dőlt sík.
Szerkesztendő a síkmetszet (ellipszis).



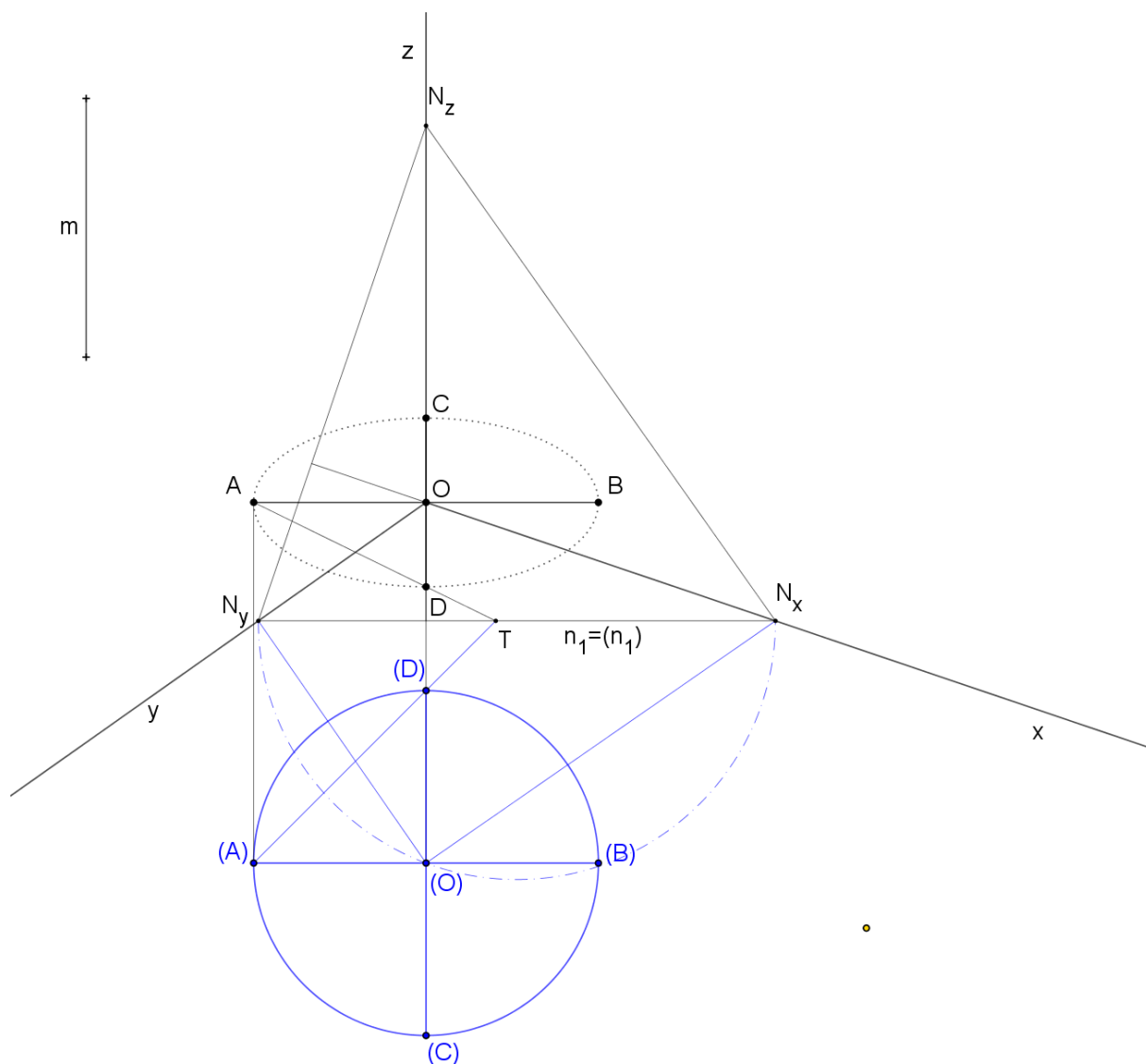
Adott egy egyenes körkúp Monge-projekcióban és egy második vetítősík.
Szerkesztendő a síkmetszet (parabola, illetve hiperbola).



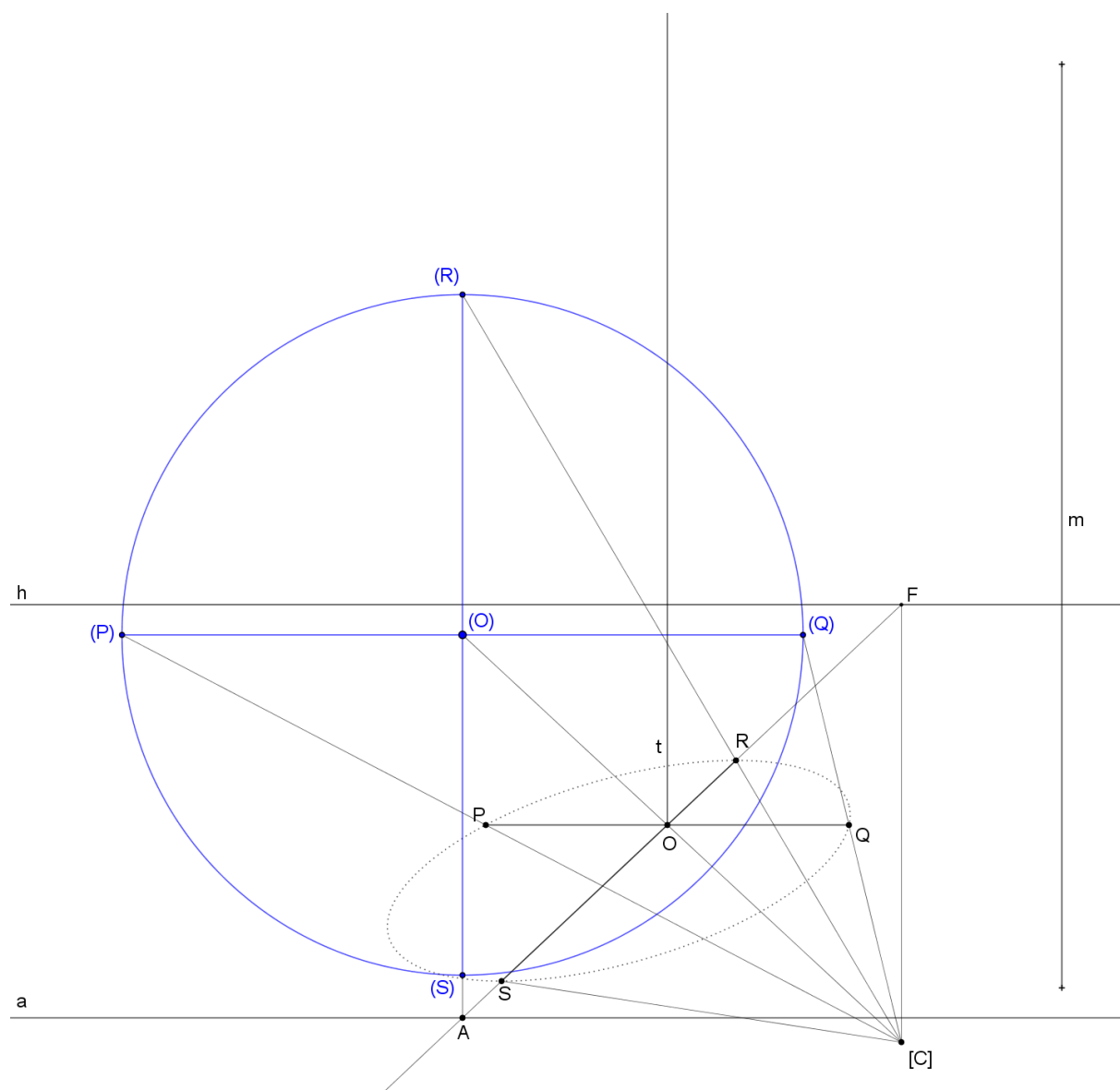
Monge-projekcióban adott egy ferde körkúp és egy fénysugárirány. Szerkesszük meg a kúp önárnyékhatár-alkotóit és az első képsíkra vetett árnyékát!

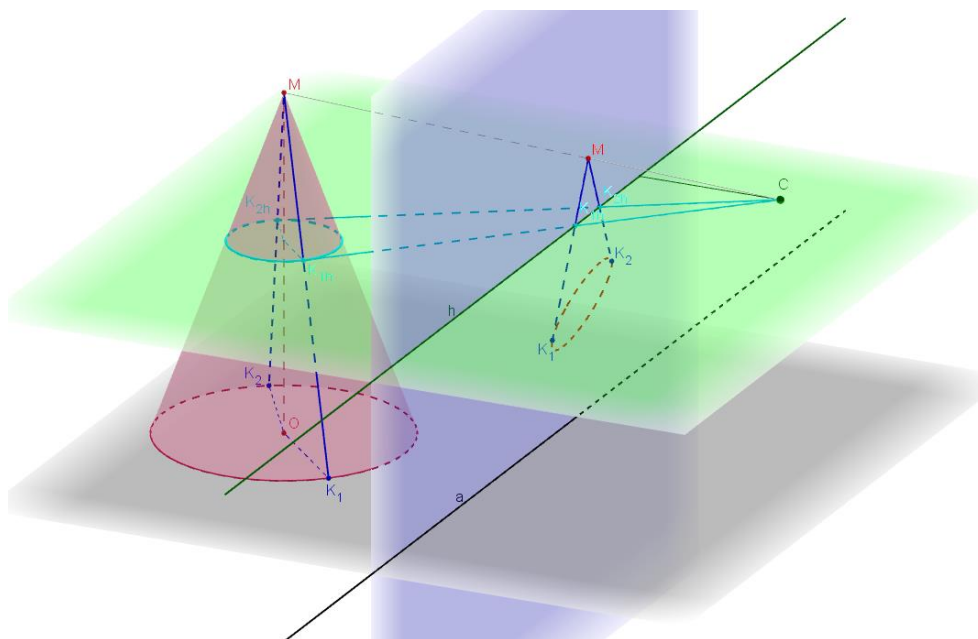


Szerkesszük merőleges axonometriában egy, az $[x,y]$ koordinátáskon álló egyenes körkúpot, ha ismert az alapkör középpontja, sugara és a kúp magassága!



Ábrázoljunk perspektívában egy olyan egyenes körkúpot, amelynek ismert az alapsíkban lévő alapköre és a magassága!





5. Gömb ábrázolása

Gömb származtatása

Szintetikusán:

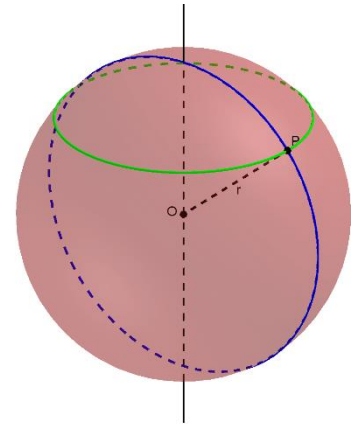
azon pontok mértani helye a térben, amelyek egy ponttól azonos távolságra vannak.

Analitikusan (origó középpontú, r sugarú gömb):
paraméteresen:

$$F(u, v) = (r \cdot \cos u \cdot \cos v, r \cdot \sin u \cdot \cos v, r \cdot \sin v)$$

$$u, v \in [0, 2\pi]$$

implicit egyenlettel: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



Elhelyezés a felületek rendszerében:

- másodrendű felület
- forgásfelület

Alapvető kapcsolódó térelemek

középpont:

(esetlegesen) tengely:

főkörök:

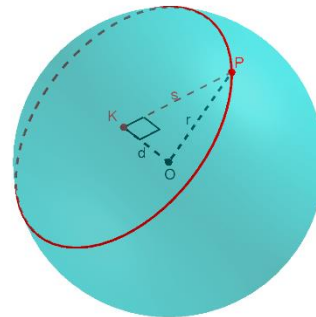
szimmetriasíkok:

Felületi pontok, pontbeli érintősík

- Minden pontja elliptikus pont.
- Pontbeli érintősík előállítása:

Lehetséges síkmetszetek

- kör
- egyetlen pont



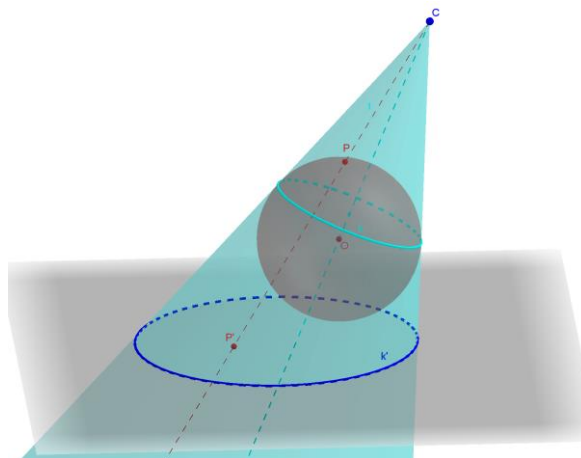
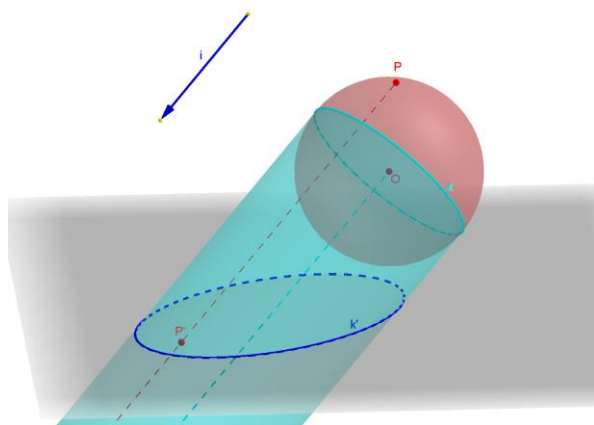
Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

Párhuzamos vetítés/fénysugár esetén főkör.

A felületre vetítőhengert/fényhengert illesztünk, ezért a lehetséges képkontúr/vetett árnyék egy henger síkmetszete.

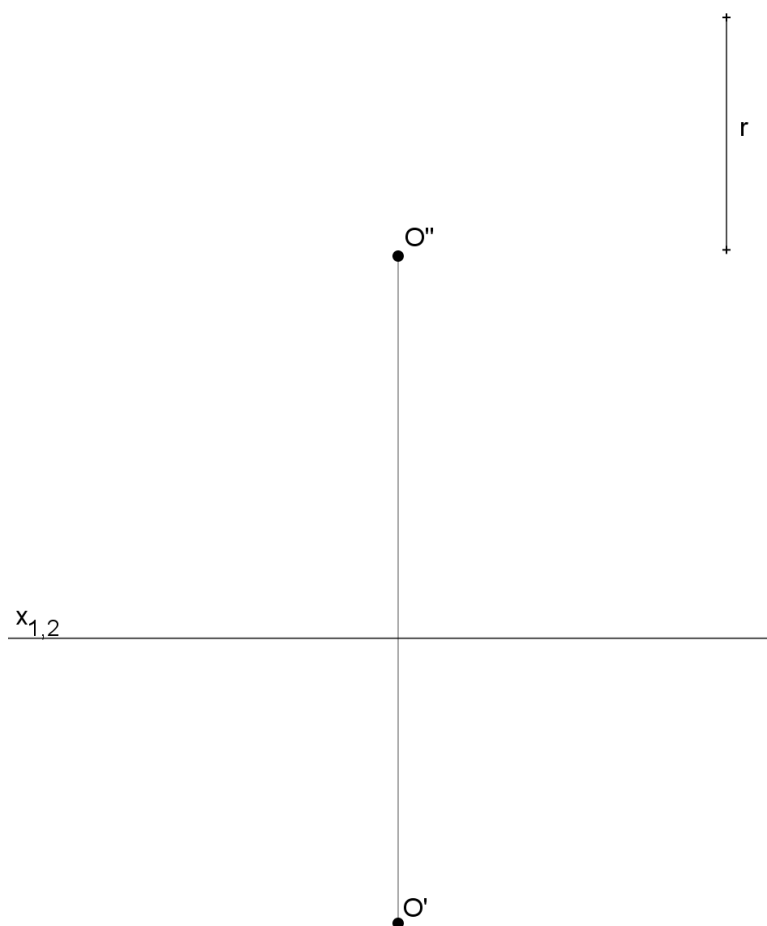
Centrális vetítés esetén kör.

A felületre vetítőkúpot illesztünk, ezért a lehetséges képkontúr egy kúp síkmetszete.



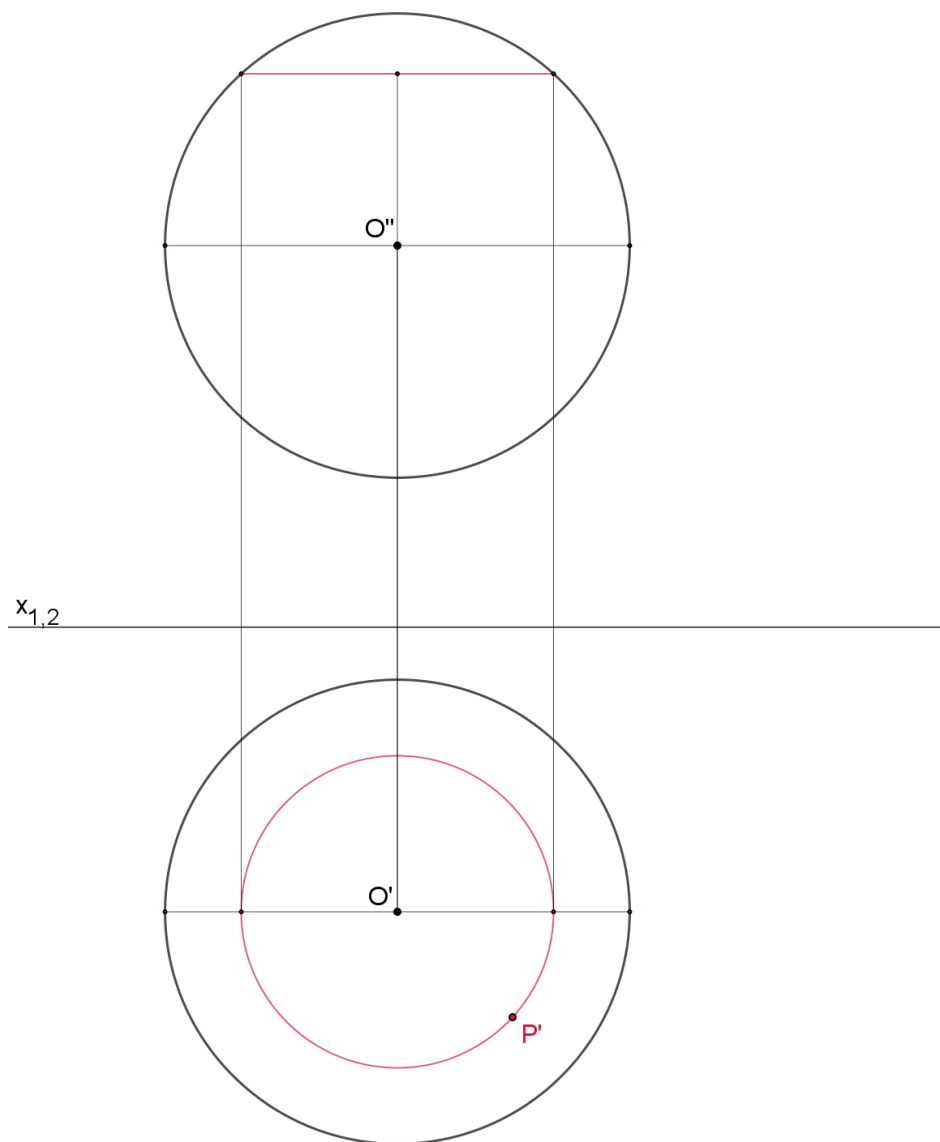
Alapvető szerkesztések

Szerkesszük meg egy O középpontú, r sugarú gömb képét Monge-projekcióban, majd vegyünk fel egy tetszőleges felületi P pontot is!

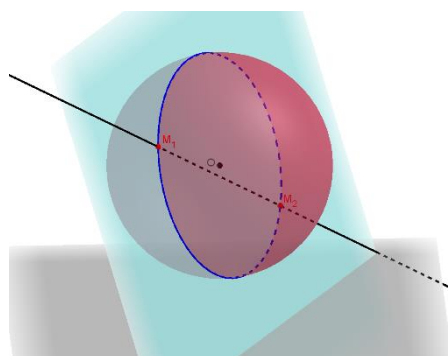
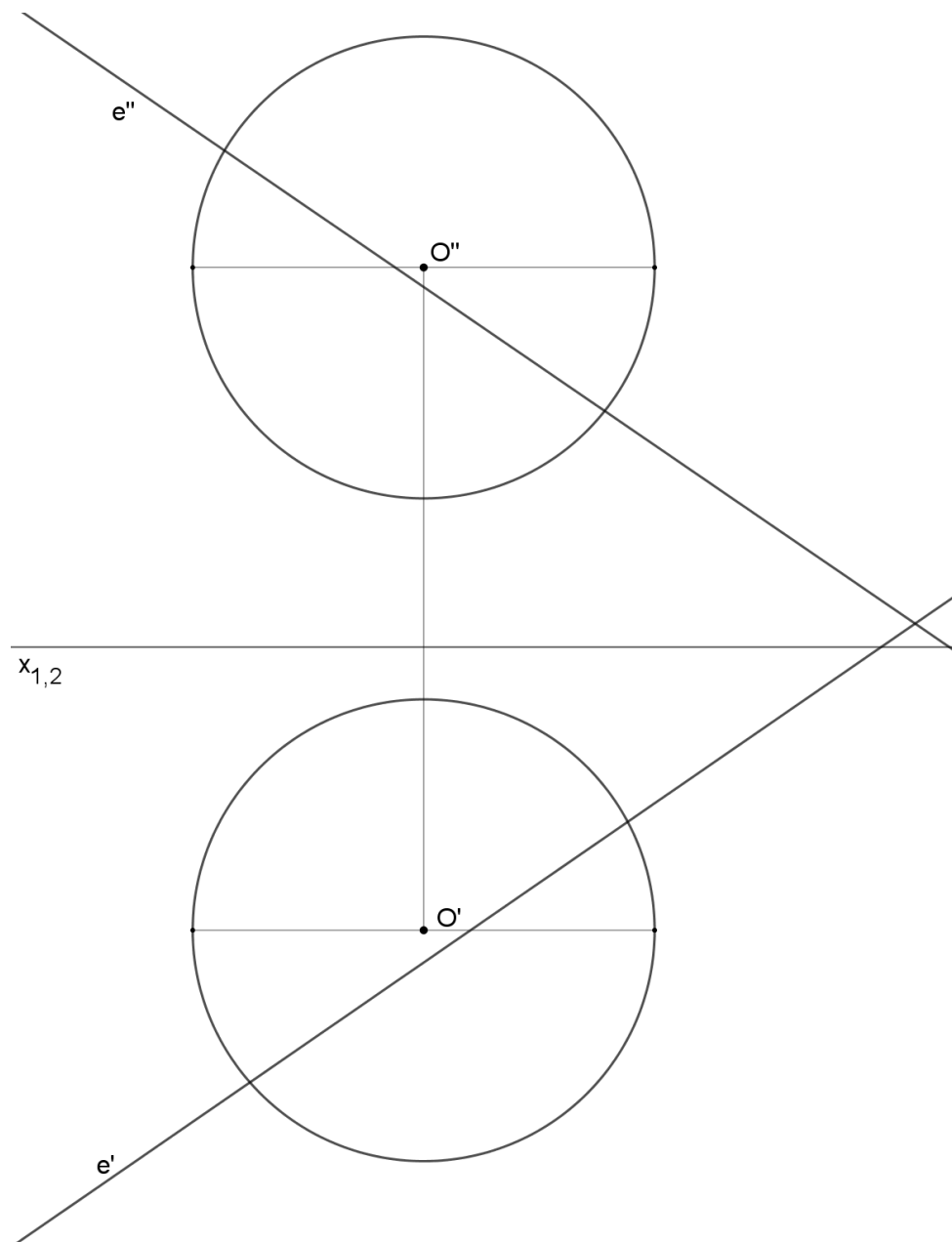


Kontúrkörök a két kép esetén:

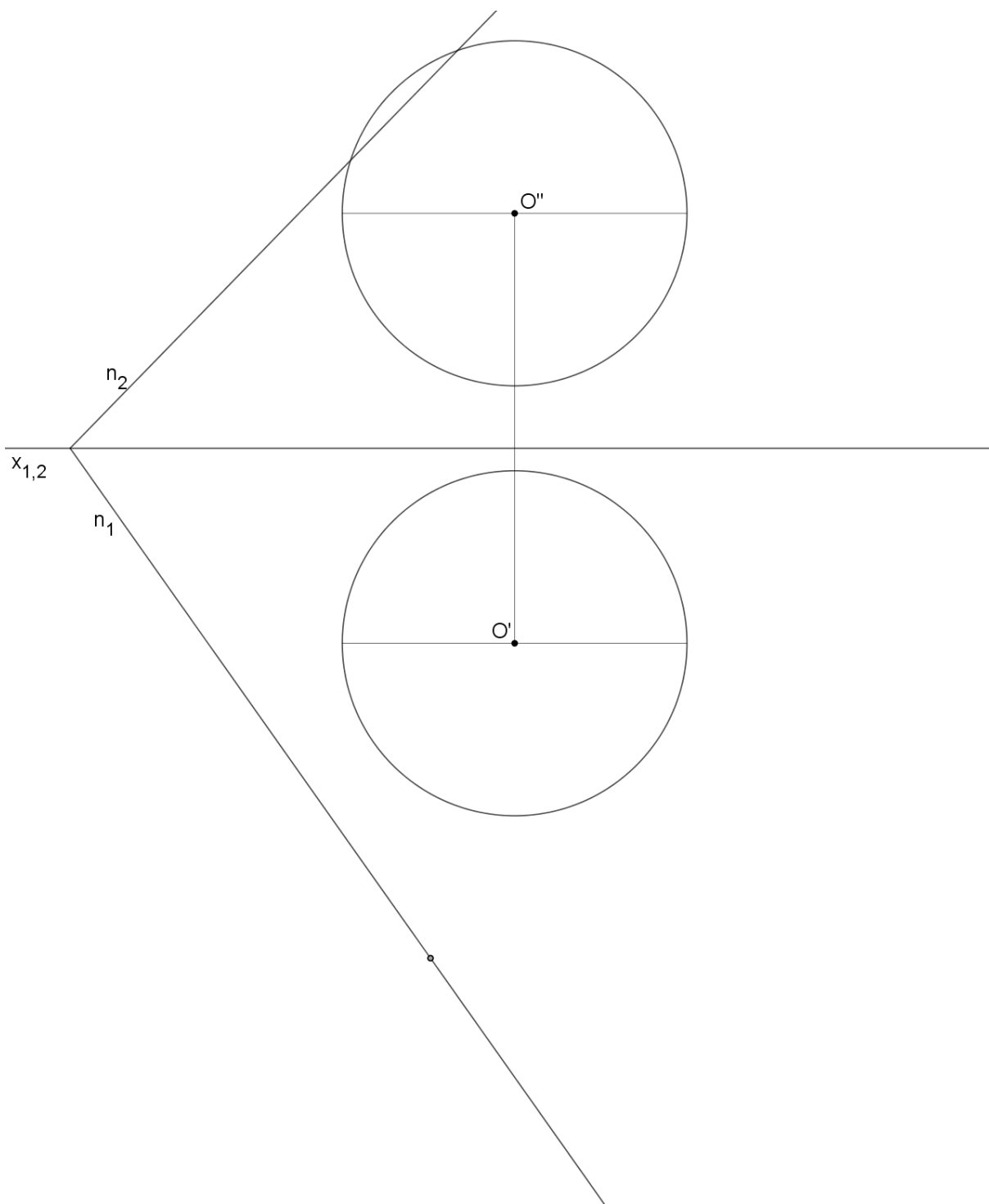
Szerkesztendő az előző feladatbeli gömb adott pontbeli érintősíkja.



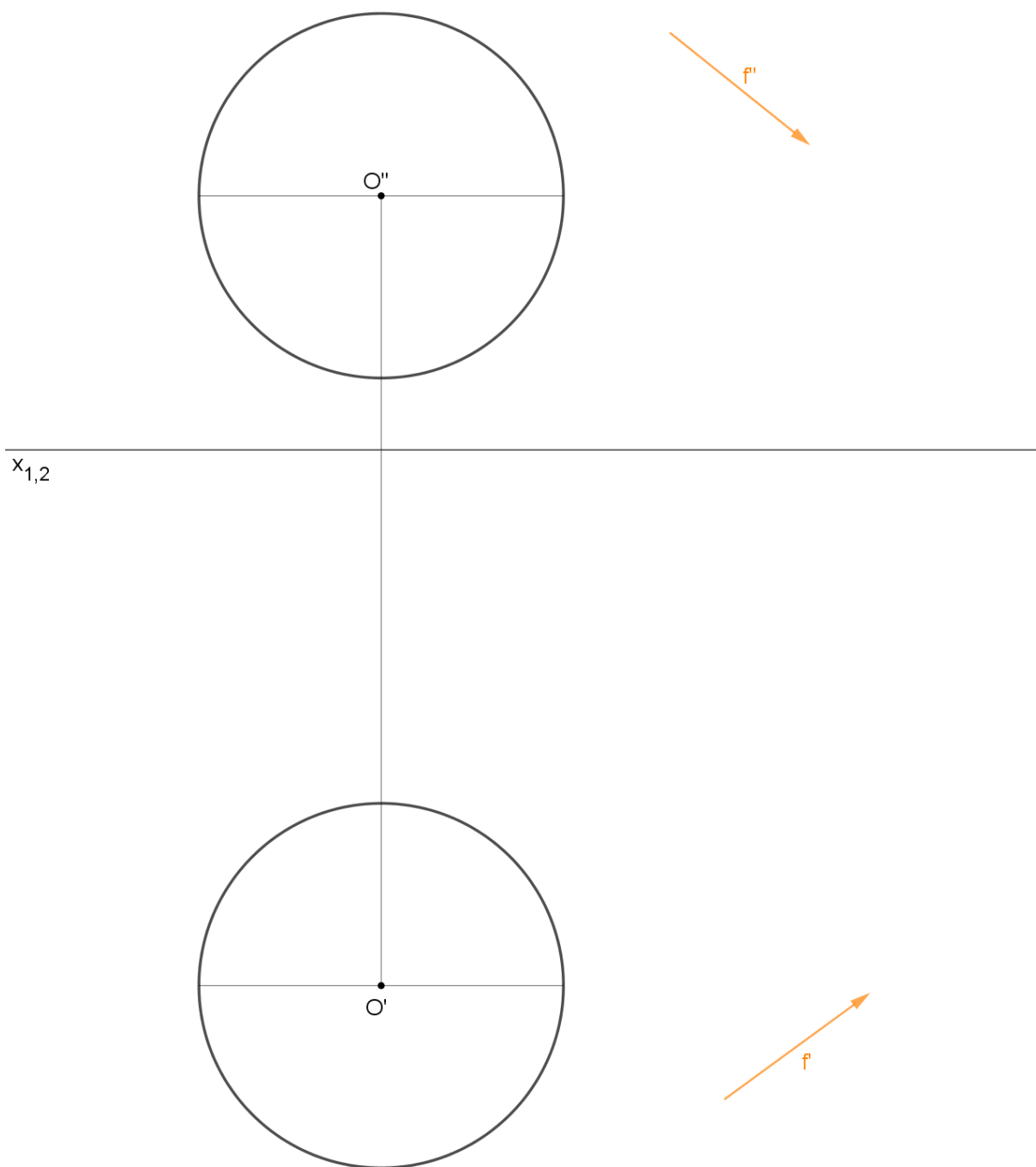
Adott egy gömb középpontjával és sugarával, valamint egy egyenes képeivel Monge-projekcióban. Szerkesszük meg a metszéspontokat!



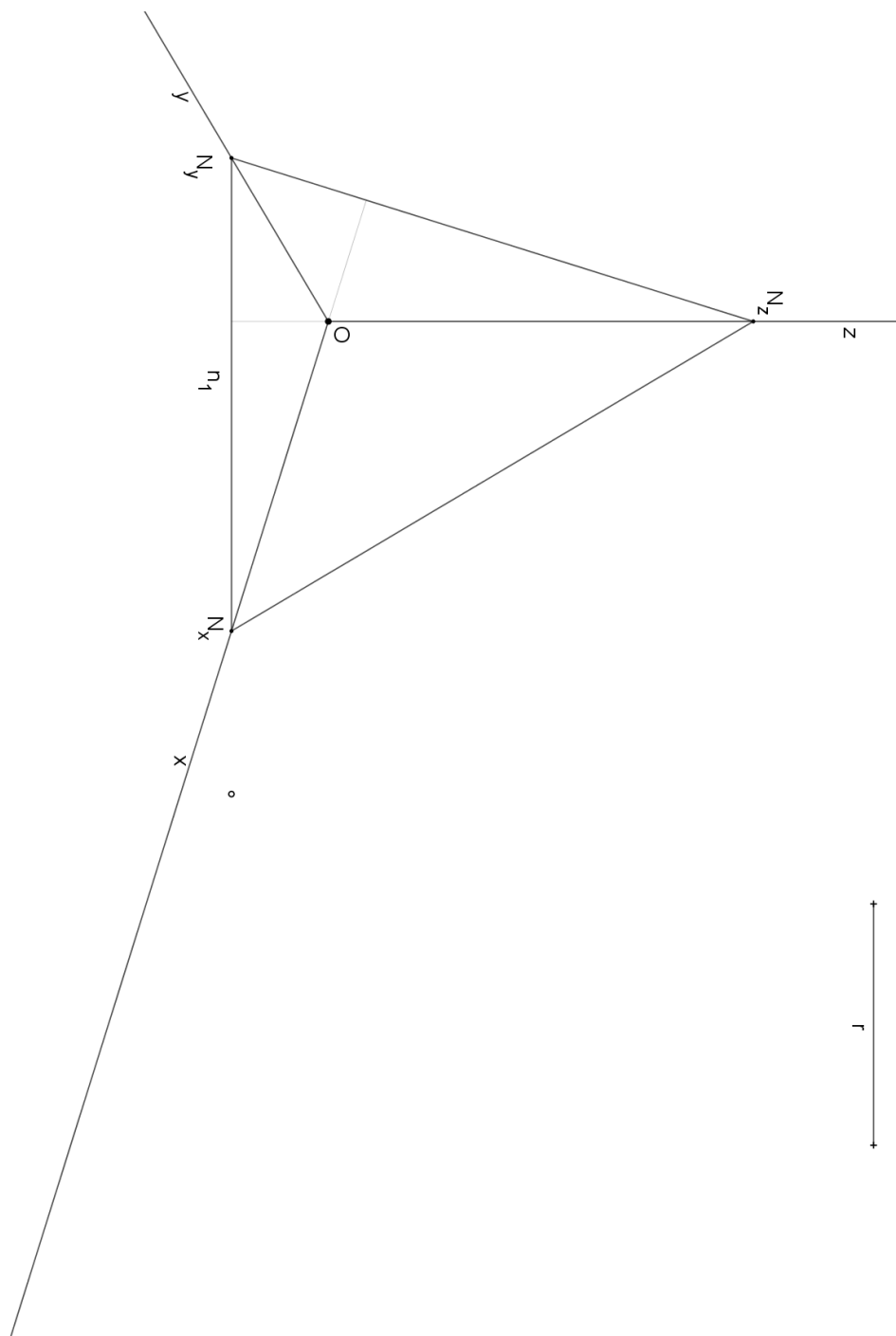
Adott egy gömb két képével és egy dőlt sík Monge-projekcióban. Szerkesszük meg a síkmetszetet!



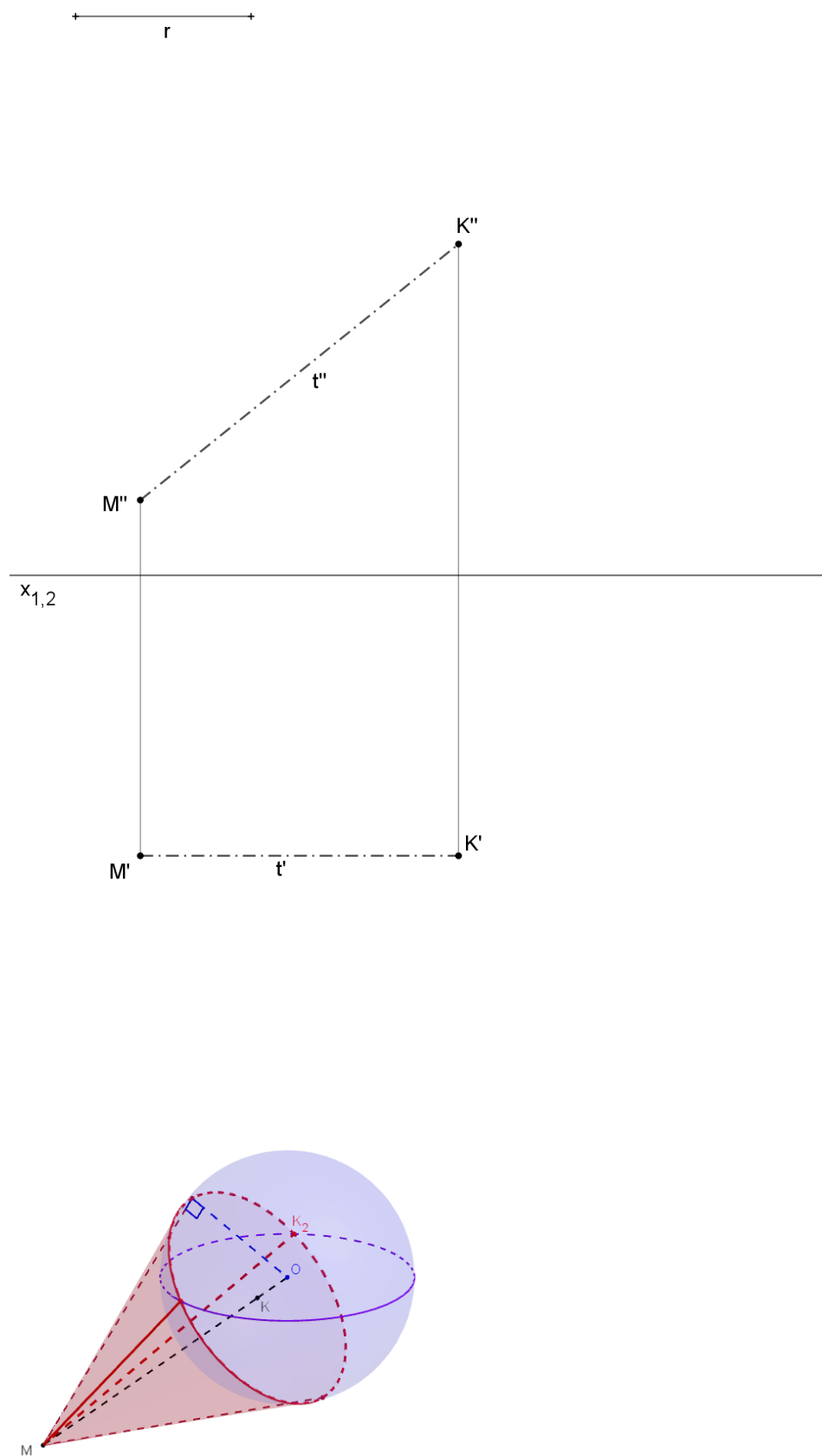
Adott egy gömb és egy fénysugárirány képeikkel Monge-projekcióban. Szerkesszük meg a gömb önárnyékhatárát és az első képsíkra vetett árnyékát!



Ábrázoljunk merőleges axonometriában egy O középpontú, r sugarú gömböt! Szerkesszük meg egy tetszőleges, $[x,y]$ koordinátákkal párhuzamos paralelkörét is!



Monge-projekcióban adott egy kúp r sugara, M csúspontja, alapkörének K középpontja úgy, hogy a tengely második fővonala legyen. Szerkesztendő a kúp kontúralkotói érintőgömb segítségével.



6. Forgásfelületekről bővebben. Tórusz

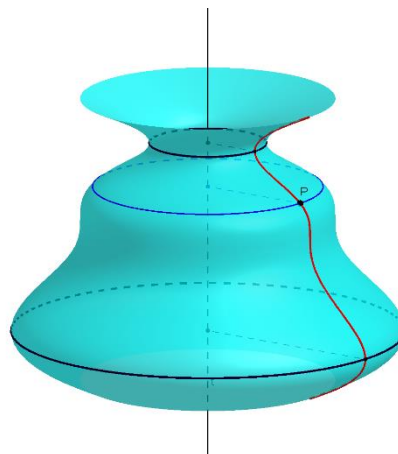
További alapvető tudnivalók a forgásfelületekről

- Általános esetben – ha a megforgatandó görbe nem szimmetrikus a forgatás tengelyére – egy n -edrendű (algebrai) görbe forgatásával $2n$ -edrendű (algebrai) felületet kapunk.
- Egy n -edrendű felület síkmetszete n -edrendű síkgörbe.
- Egy n -edrendű felületet egy egyenes legfeljebb n pontban metsz.
- Egy pontbeli érintősíkot legegyszerűbben a ponton áthaladó paralelkör és meridiángörbe érintőegyenesei segítségével adhatjuk meg.

Speciális paralelkörök

torokkör:

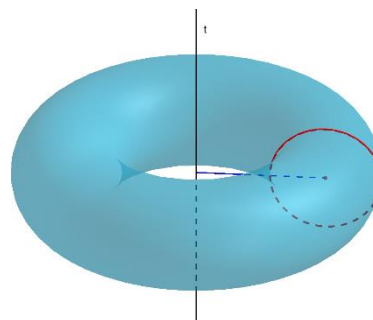
ekvátorkör:



Tórusz (körgyűrűfelület) származtatása

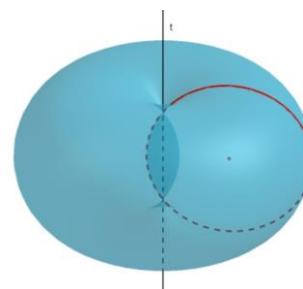
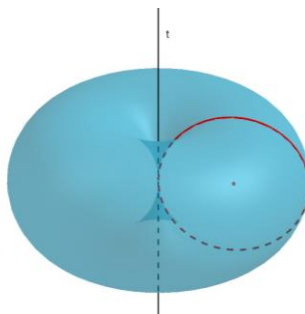
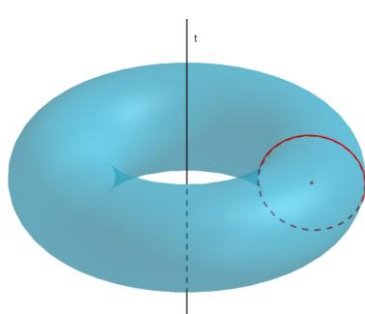
Szintetikusán:

Tekintsünk egy síkot, abban egy egyenest és egy olyan kört, amelynek középpontja nem tartalmazza az egyenest. Ha az egyenes mint tengely körül megforgatjuk az adott kört, egy tóruszt kapunk.



A tórusz

- *nyitott*, ha a kör nem metszi a tengelyt;
- *zárt*, ha a kör érinti a tengelyt;
- *csonka*, ha a kör metszi a tengelyt.



Analitikusan (z tengelyű tórusz):

$$F(u, v) = ((R + r \cdot \cos u) \cdot \cos v, (R + r \cdot \cos u) \cdot \sin v, r \cdot \sin u)$$

$u, v \in [0, 2\pi]$, R : a tengely és a kör középpontjának távolsága, r : a kör sugara

Elhelyezés a felületek rendszerében:

- negyedrendű felület
- forgásfelület

Alapvető kapcsolódó térelemek

tengely:

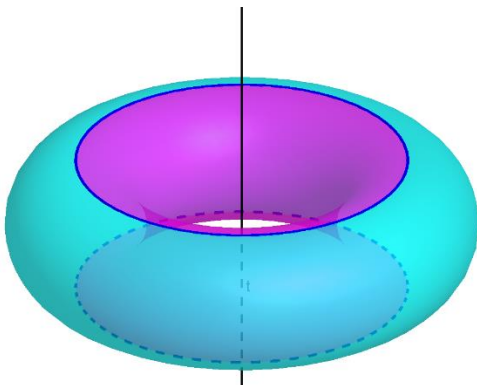
meridiánkör:

meridiánmetszet:

szimmetriasíkok:

Felületi pontok, pontbeli érintősík

- A tórusz külső részén (a meridiánkör tengelytől távolabbi félkörének megforgatásával adódó részen) minden pont elliptikus.
A legmagasabb és legalacsonyabb paralelkör pontjai parabolikusak.
A tórusz belső részén minden pont hiperbolikus.

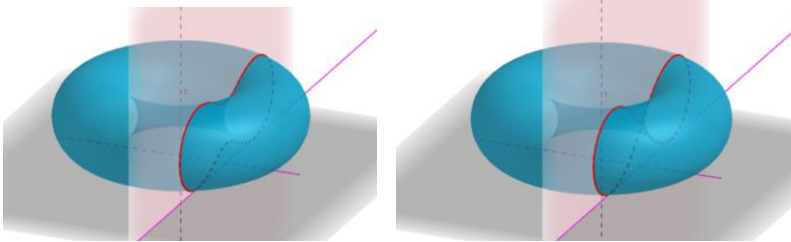


- Pontbeli érintősík előállítás:

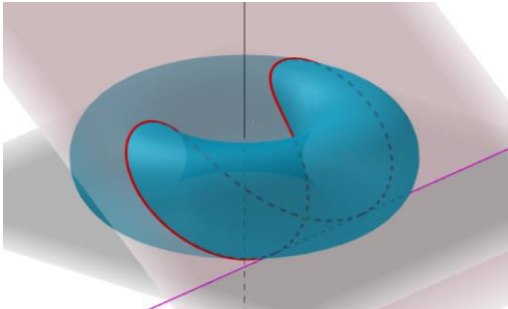
Lehetséges síkmetszetek

Az általános esetek mellett néhány kiemelt speciális eset:

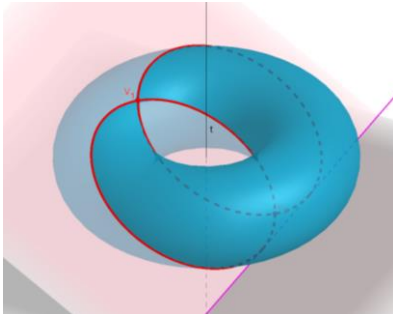
- tengellyel párhuzamos síkmetszetek, az ún. Cassini-görbék;



- egy hiperbolikus pontbeli érintősíkkal kapott síkmetszet: a metszetnek ún. kettős pontja vagy duplapontja* van; *Duplapont: a görbe az adott ponton kétszer is áthalad.

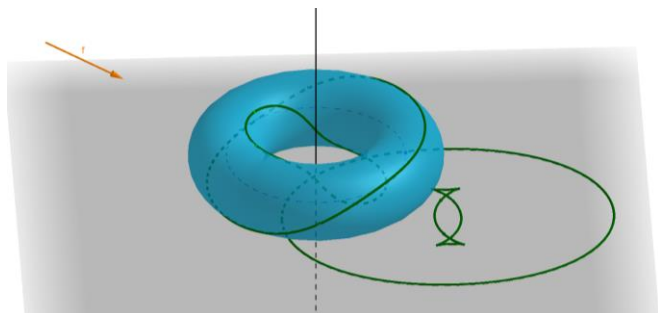
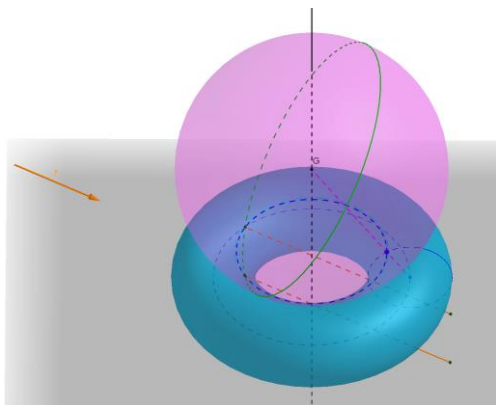


- két hiperbolikus pont közös érintősíkjának metszetgörbéje az ún. Villarceau-körök.



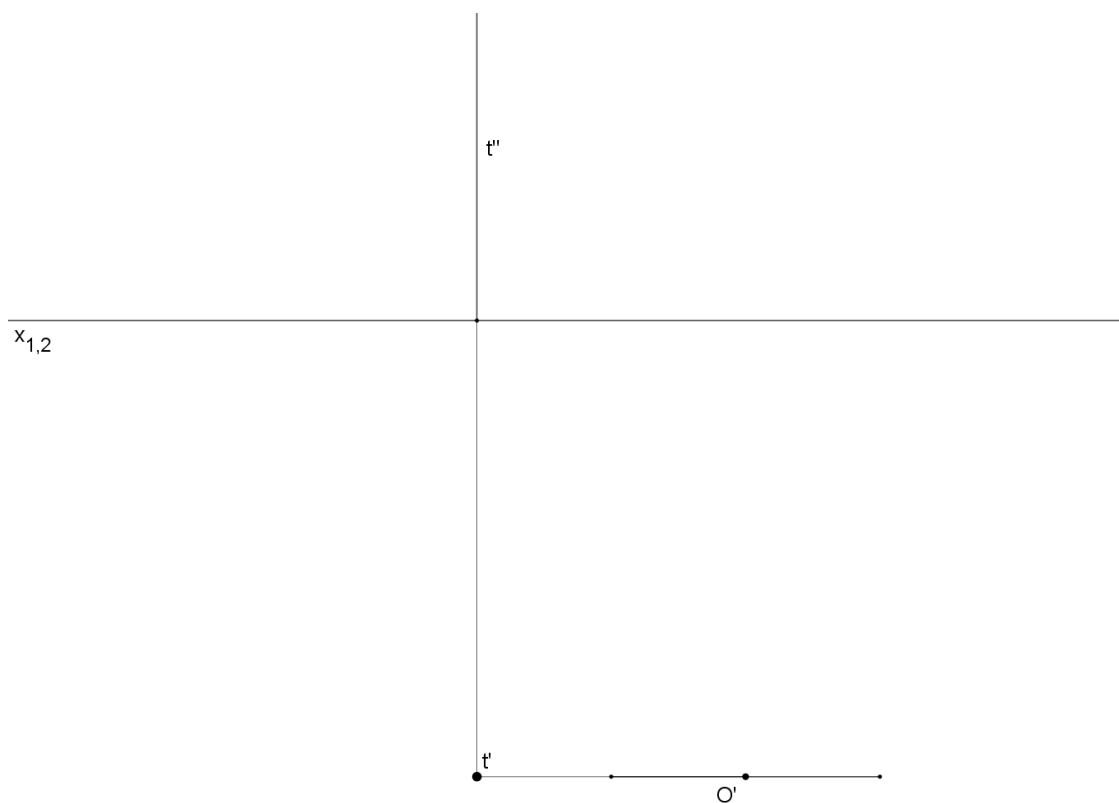
Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

Párhuzamos vetítés/fénysugár esetén a felületre írt, két darabból álló térgörbe, amely például segédgömbökkel szerkeszthető.

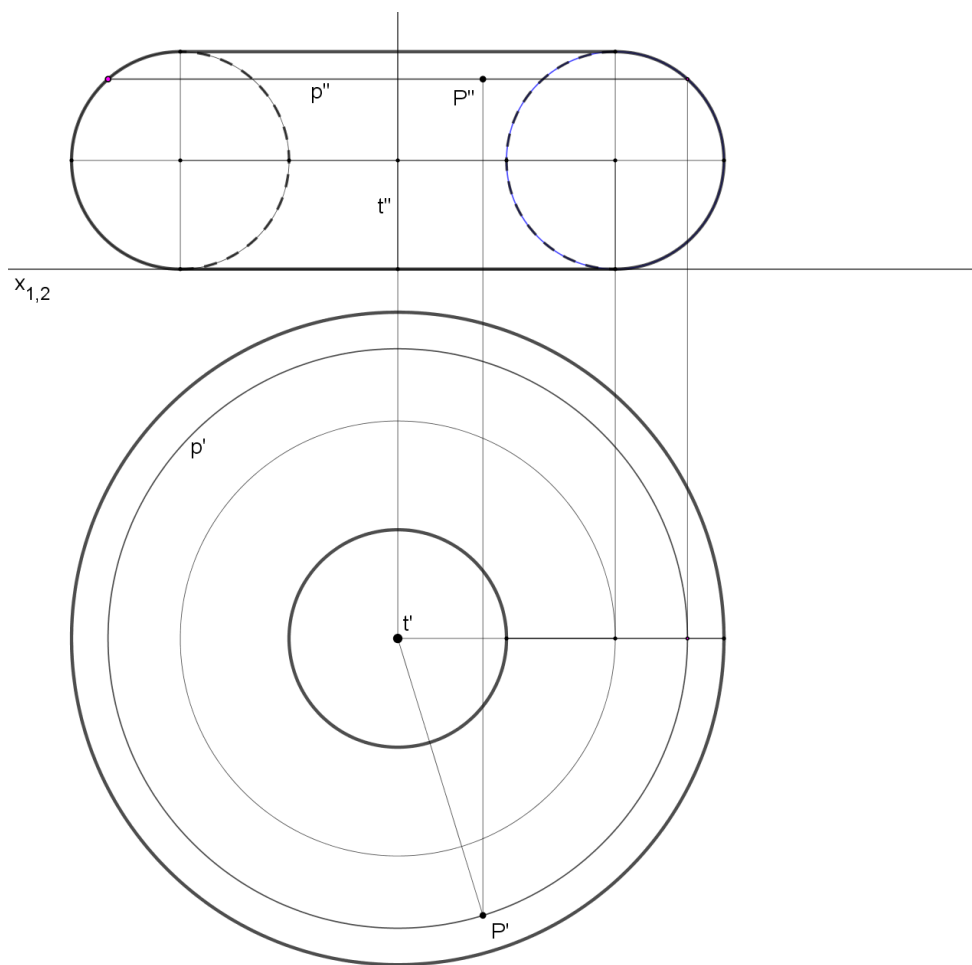


Alapvető szerkesztések

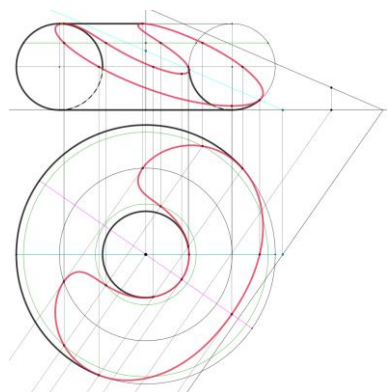
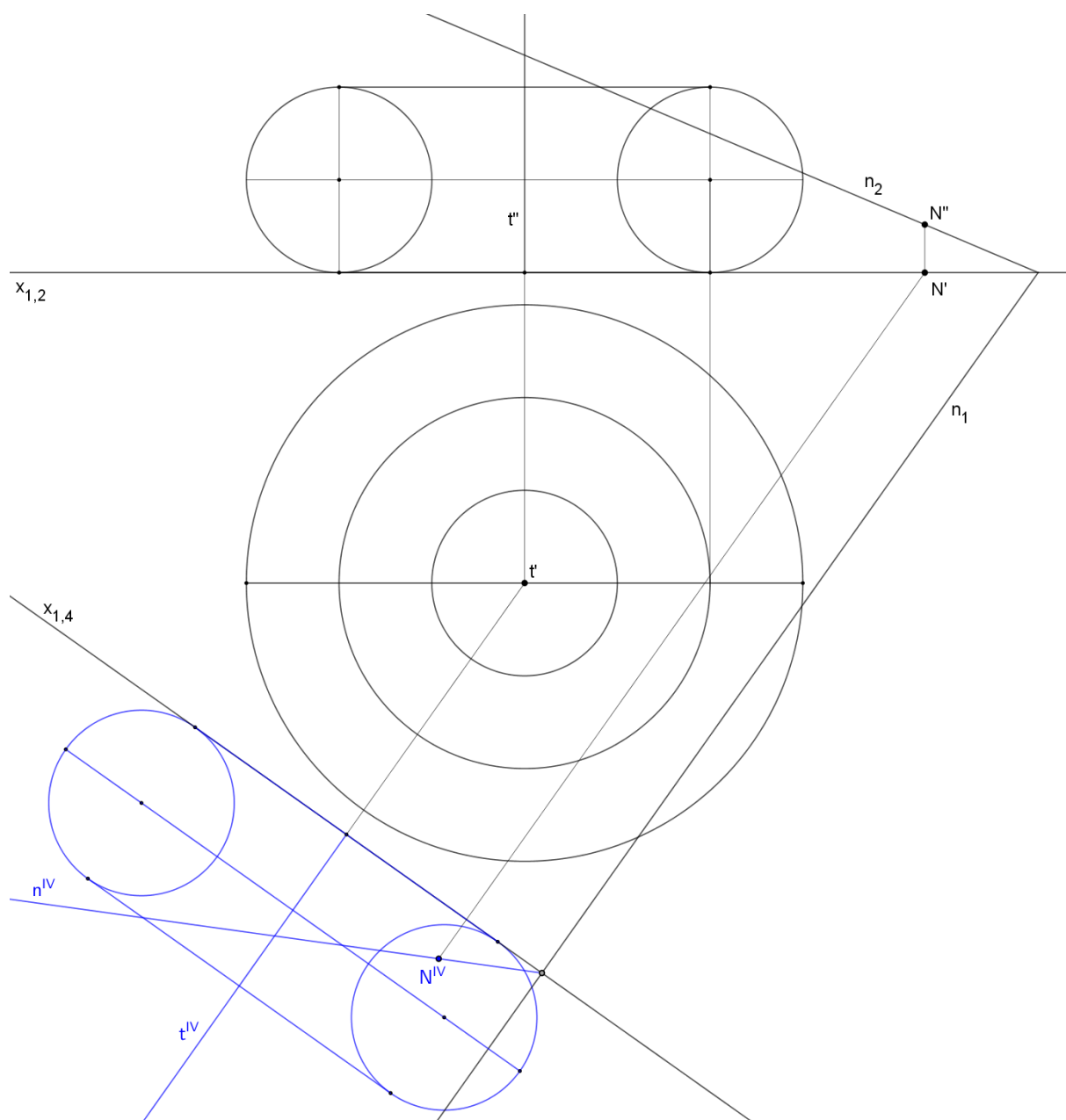
Szerkesszük meg Monge-projekcióban egy olyan, az első képsíkon álló tórusz két képét, amelynek tengelye egy első vetítősugár, meridiánkörének középpontja és sugara ismert! Adjuk meg egy tetszőleges pontjának képeit is!



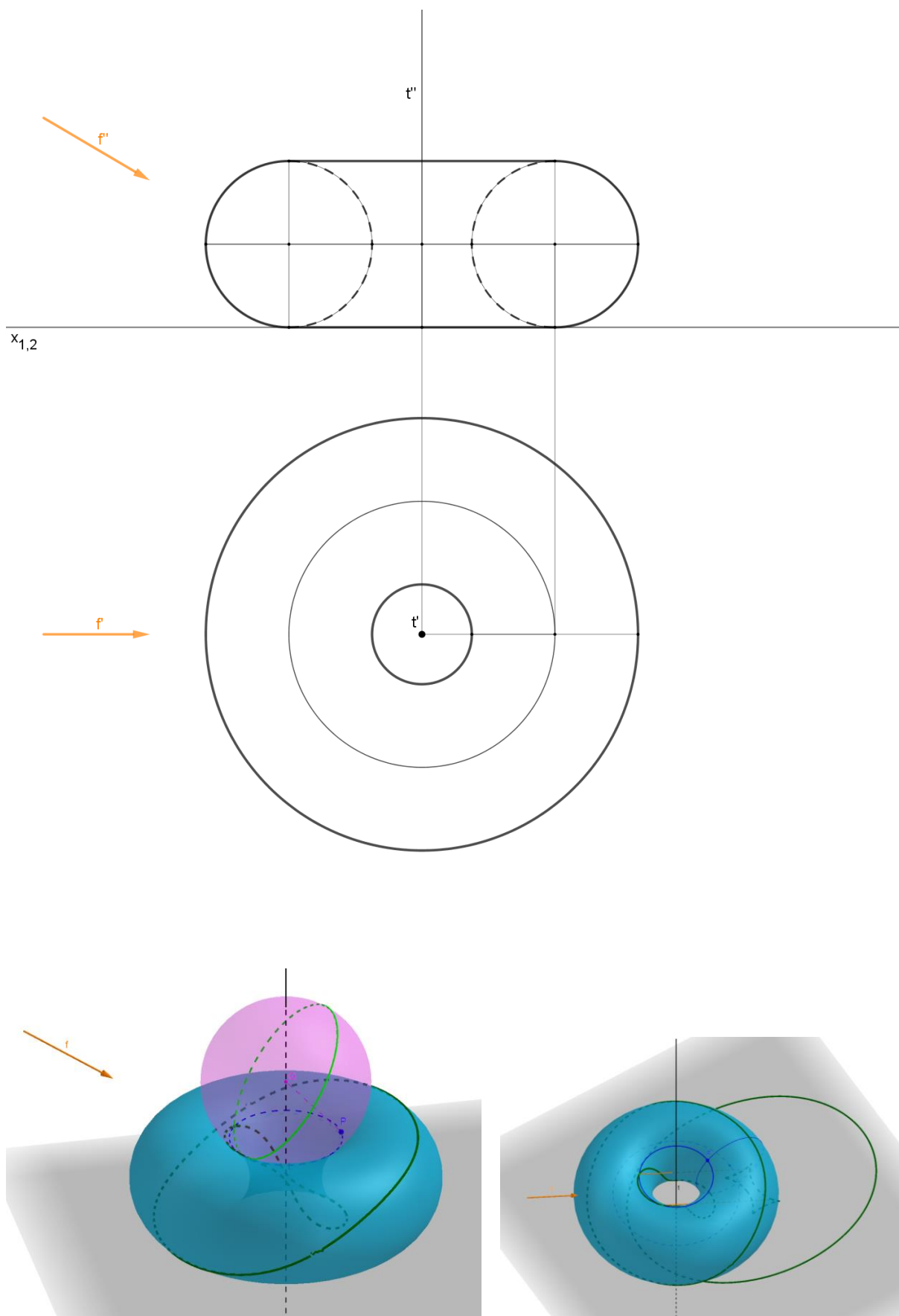
Szerkesszük meg az előbbi tórusz adott pontjában a felület pontbeli érintősíkját!



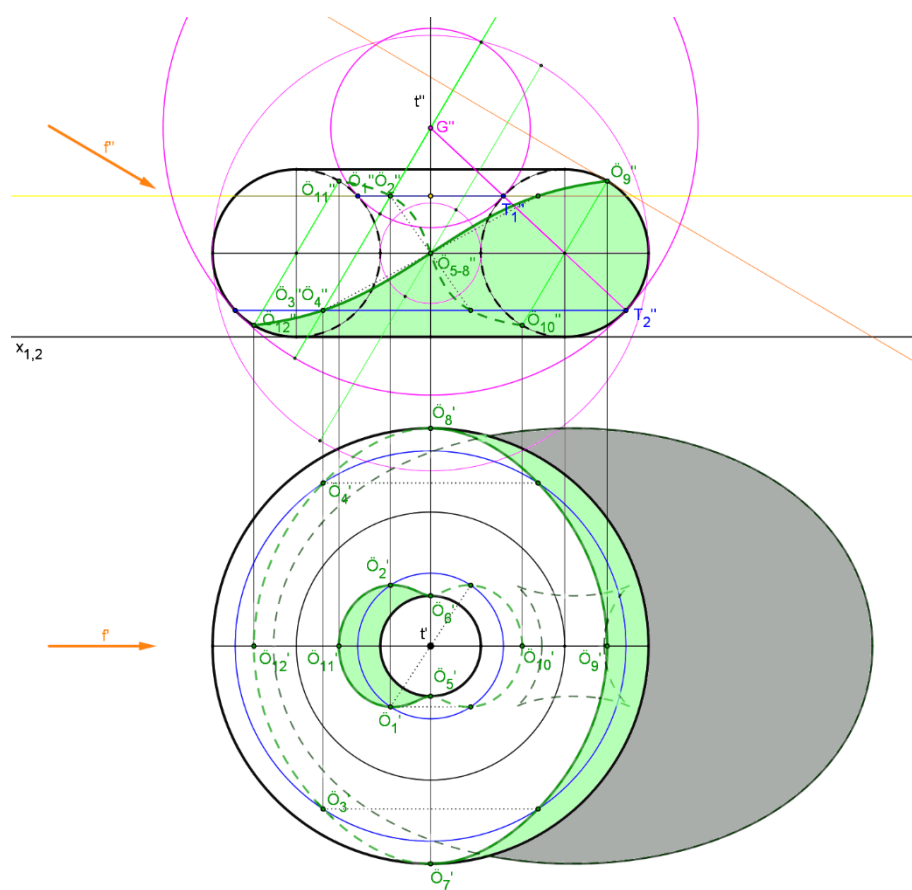
Adott egy, az első képsíkon álló tórusz két képével és egy sík nyomvonalával Monge-projekcióban. Szerkesztendő a síkmetszet.



Adott Monge-projekcióban egy, az első képsíkon álló tórusz két képével és egy fénysugárirány. Szerkesztendő a tórusz önárnyékhatár-görbéje.



A vetett árnyékkal együtt a megoldás:



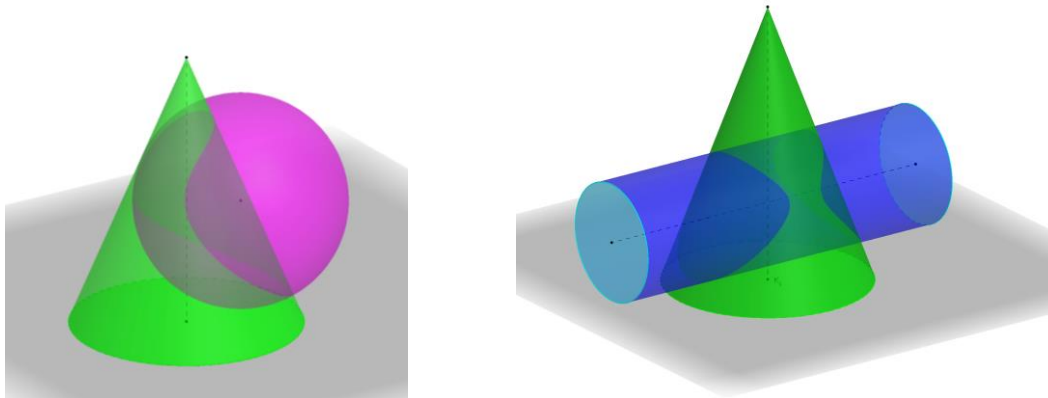
A segédgömbös szerkesztést lásd még a gyakorlaton: tórusz kontúrja merőleges axonometriában.

7. Áthatások 1.

A tárgyalás során csak algebrai felületekkel foglalkozunk.

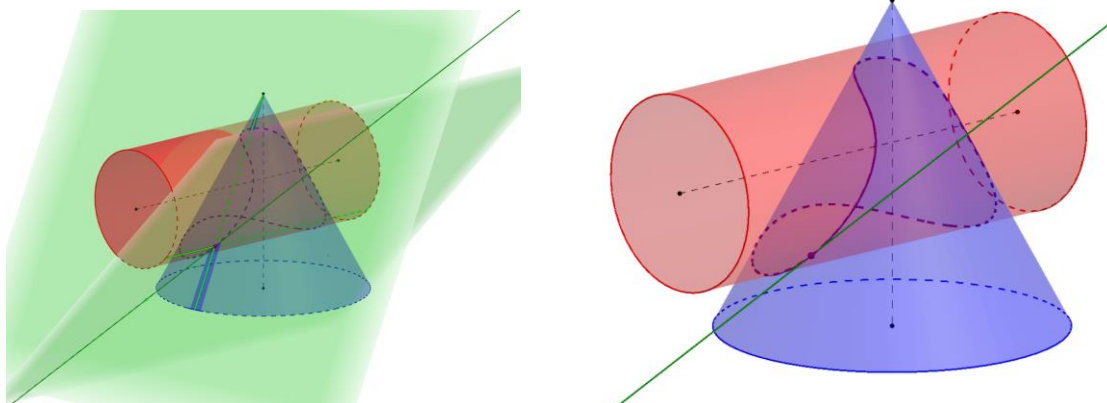
Az áthatási görbe rendszáma, típusai

- Egy n -edrendű és m -edrendű felület áthatási görbéje legfeljebb nm -edrendű térgörbe. Pl.



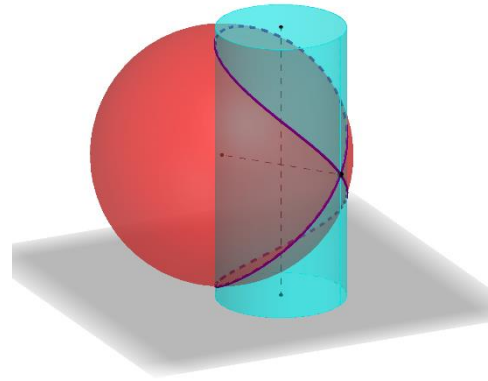
- Ugyanúgy lehet teljes áthatásról vagy bemetszésről beszélni, mint a gúla és hasábok esetében.
- A görbe állhat egy vagy több darabból.
- Történhetnek látszólagos „rendvesztések”, például két gömb áthatása esetén.
- Léteznek ún. széteső áthatások is, lásd később.

Az áthatási görbe egy pontjának érintőegyenese előáll a két felület pontbeli érintősíkjainak metszésvonalaként.



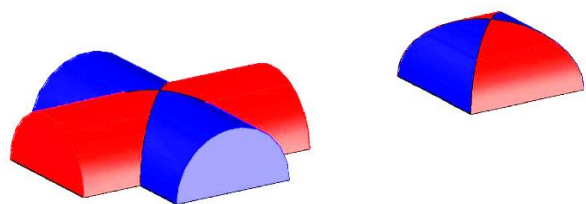
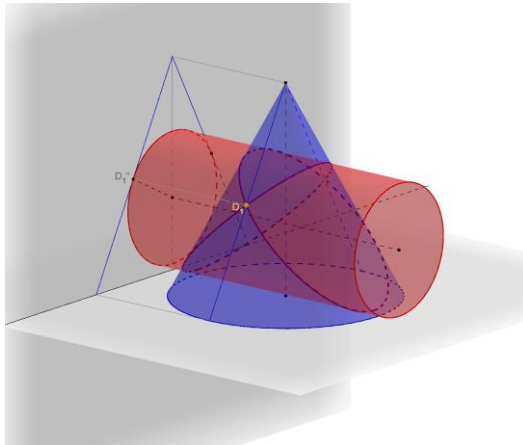
Duplapont (vagy kettős pont): az áthatási görbe egy pontjában a két felület pontbeli érintősíkja egybeesik. Ezekben a pontokban a görbe önátmetsző.

Nevezetes példa: Viviani-görbe



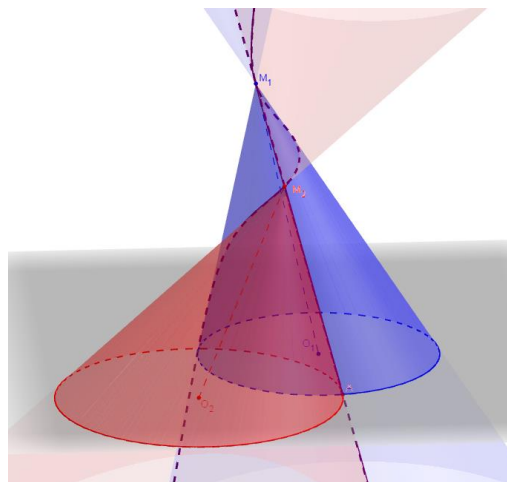
Széteső áthatás (másodrendű felületekre ismertetve):

- Ha két másodrendű felület áthatási görbéjének két duplapontja van, úgy az áthatási görbe 2 db másodrendű görbére esik szét. (rend: $2+2=4$)



(római keresztboltozat és kolostorboltozat)

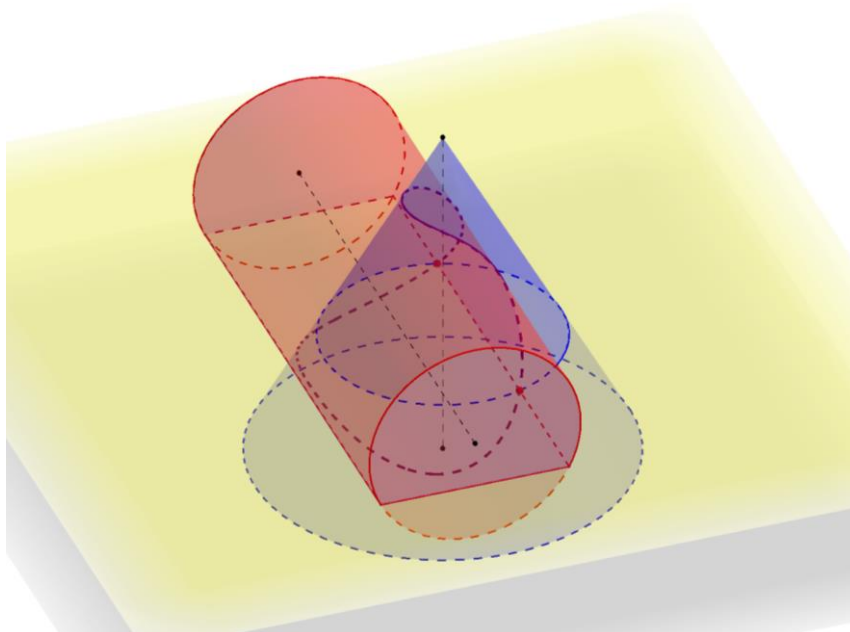
- Ha két másodrendű felületnek van *egy* elsőrendű közös eleme (közös alkotója), akkor az áthatási görbe ebből az alkotóból és egy azt metsző harmadrendű térgörbéből áll. (rend: $1+3=4$)



Tipikus módszerek az áthatási pontok megszerkesztésére

Szeletelősíkok módszere 1.

Olyan párhuzamos síkokat választunk, amelyek mindkét felületből egyszerű alakzatokat metszenek ki (egyenespárokat, köröket). Az egyes szeletelősíkokban kapott alakzatok metszéspontjai az áthatási görbe pontjai. – A félév során ezt a módszert használjuk.

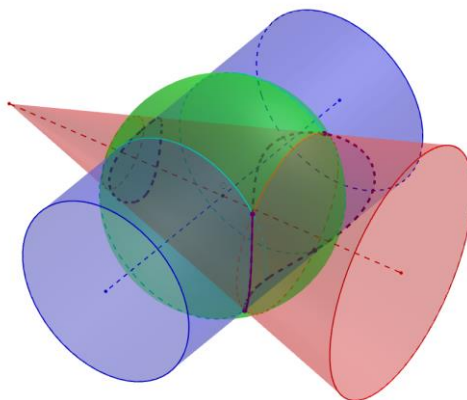


Szeletelősíkok módszere 2.

A szeletelősíkok áthaladhatnak egy egyenesen, ezt „lengősíkos eljárásnak” is nevezik. (Például előző félében két gúla áthatásánál is ezt a módszert használtuk.) Alkalmas közös alapsíkkal rendelkező kúpok és/vagy hengerek áthatásának meghatározására.

Segédgömbök módszere

Metsző tengelyű forgásfelületek esetén a tengelyek metszéspontja a segédgömbök középpontja. Egy ilyen segédgömb mindkét felületből kört metsz ki. A gömbön lévő körök metszéspontjai az áthatási görbe pontjai.



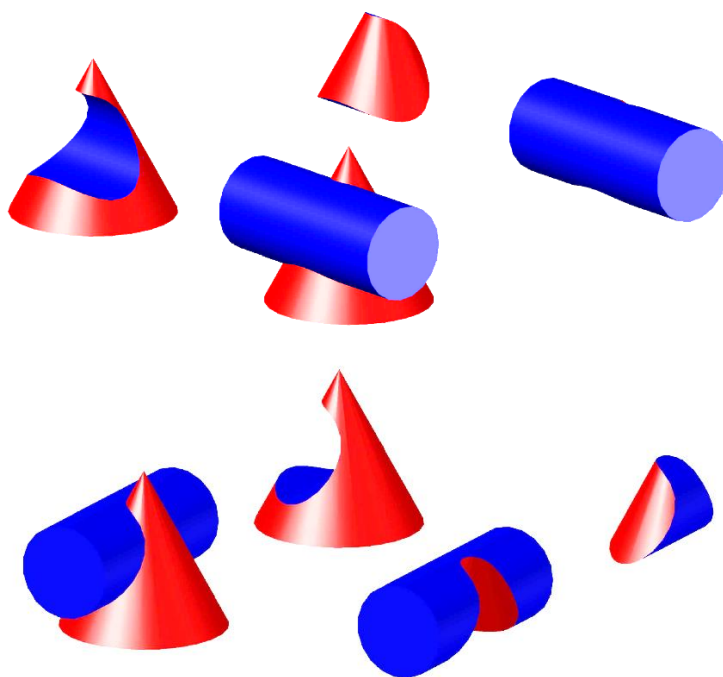
Szerkesztéstechnikai tudnivalók

Megszerkesztendő („lényeges”) pontok

- speciális pontok (pl. duplapont)
- szimmetriasíkbeli pontok
- legmagasabban és legalacsonyabban fekvő pontok
- kontúrpontok (több kép esetén minden képnél)

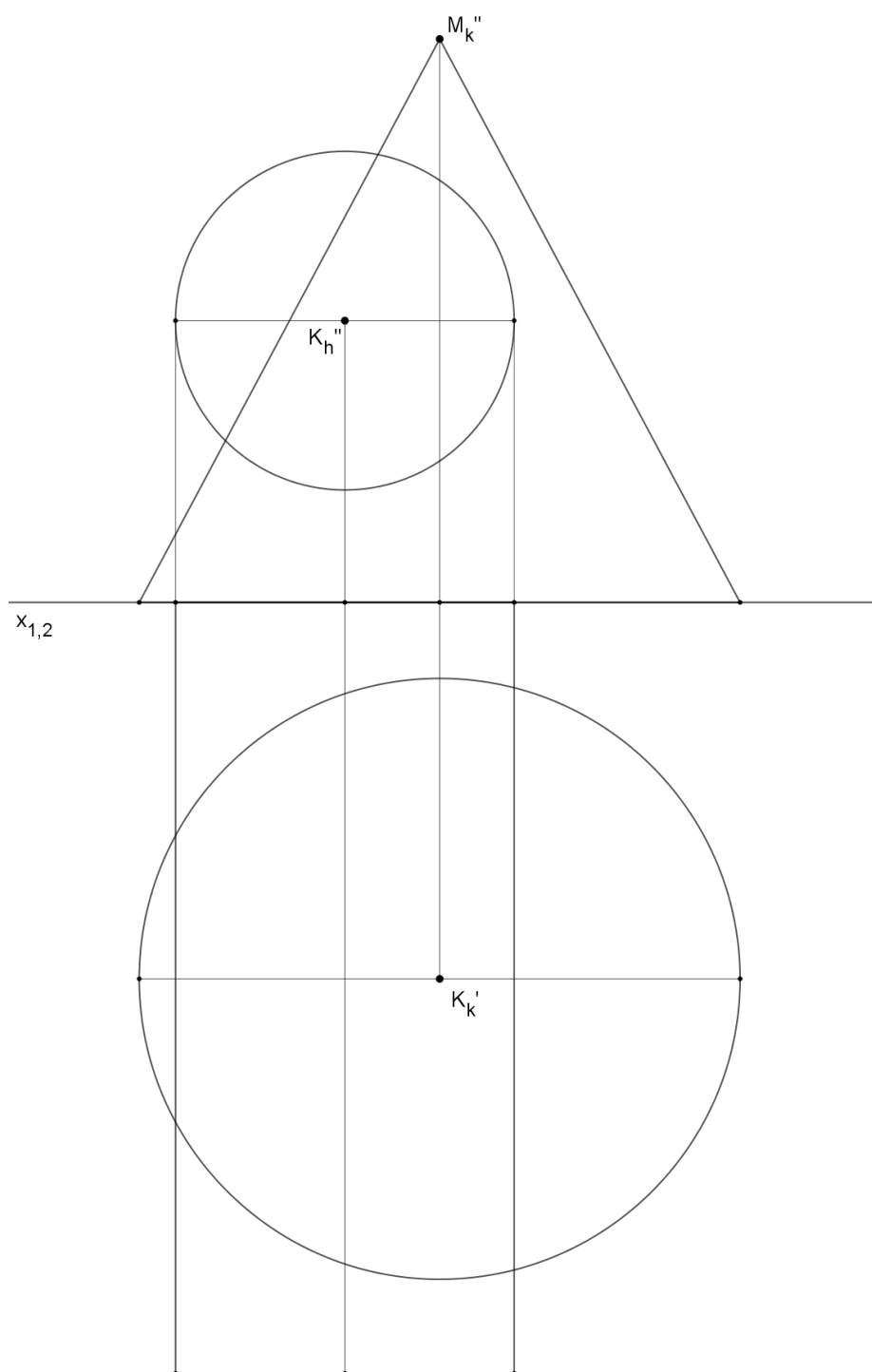
Amennyiben a két felületnek létezik közös szimmetriasíkja, és azzal a képsík párhuzamos, úgy az adott képen az áthatási görbének *kettős vetülete* keletkezik. Ekkor például egy negyedrendű görbe képe másodrendű görbe. (Lásd a kidolgozott példát.)

Lehetőségek a láthatóság ábrázolásakor



Alapvető szerkesztés(ek)

Adott egy, az első képsíkon álló egyenes körkúp és egy, a második képsíkon álló egyenes körhenger. Szerkesszük meg a két felület áthatási görbéjének lényeges pontjait, általános pontjait, majd az egyik általános pontban az áthatási görbe érintőegyenesét is!



8. Ellipszoid

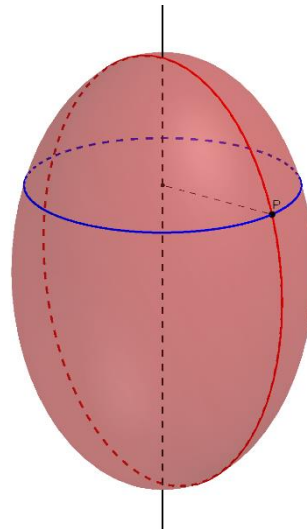
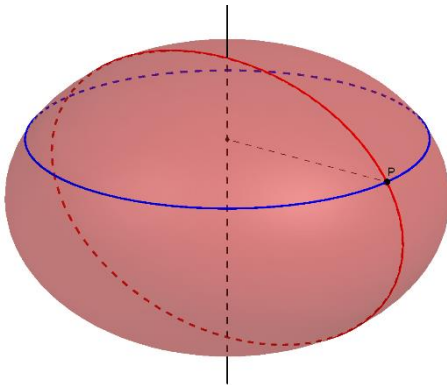
Ellipszoid származtatása

Szintetikusán, forgásfelületként (szferoid):

egy a és b fél nagy- illetve kistengelyű ellipszis valamely tengelyegyenese körüli forgatásával kapott felület.

kistengely körüli forgatással – lencse alakú

nagytengety körüli forgatással – tojás/orsó alakú



Analitikusan (origó középpontú, $2a, 2b, 2c$ tengelyű ellipszoid):

paraméteresen:

$$F(u, v) = (a \cdot \cos u \cdot \cos v, b \cdot \cos u \cdot \sin v, c \cdot \sin u)$$

$$u, v \in [0, 2\pi]$$

implicit egyenlettel: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Elhelyezés a felületek rendszerében:

- másodrendű felület
- ha az a, b és c közül min. kettő egyenlő, akkor forgásfelület

Alapvető kapcsolódó térelemek

középpont:

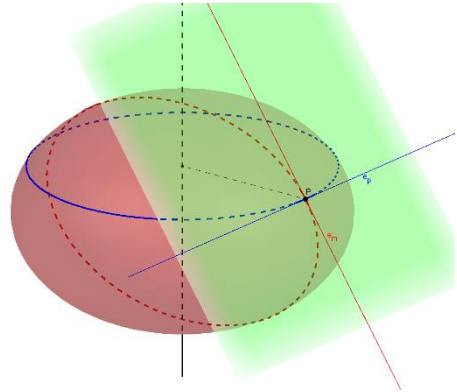
tengelyek:

szimmetriasíkok:

A továbbiakban csak a forgásellipszoid bemutatására szorítkozunk.

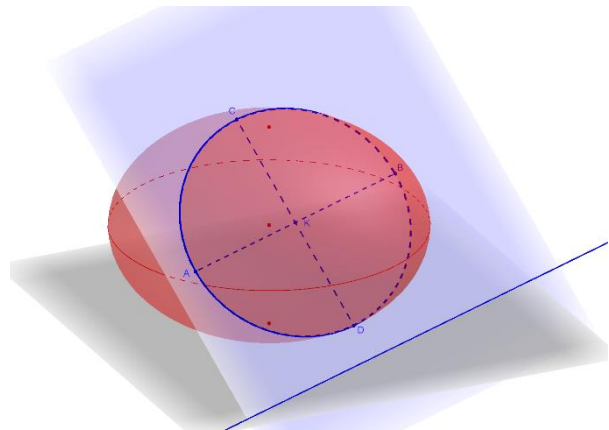
Felületi pontok, pontbeli érintősík

- Minden pontja elliptikus pont.
- Pontbeli érintősík előállítás:



Lehetséges síkmetszetek

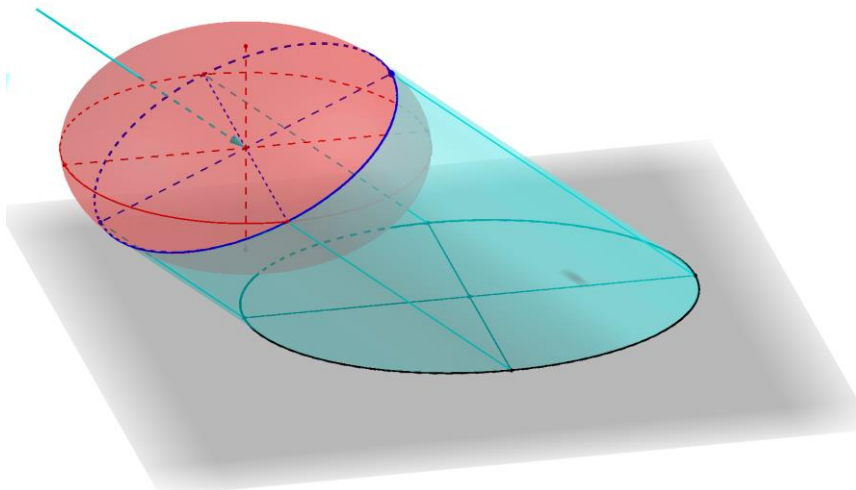
- ellipszis
- kör
- egyetlen pont



Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

Párhuzamos vetítés/fénysugár esetén ellipszis.

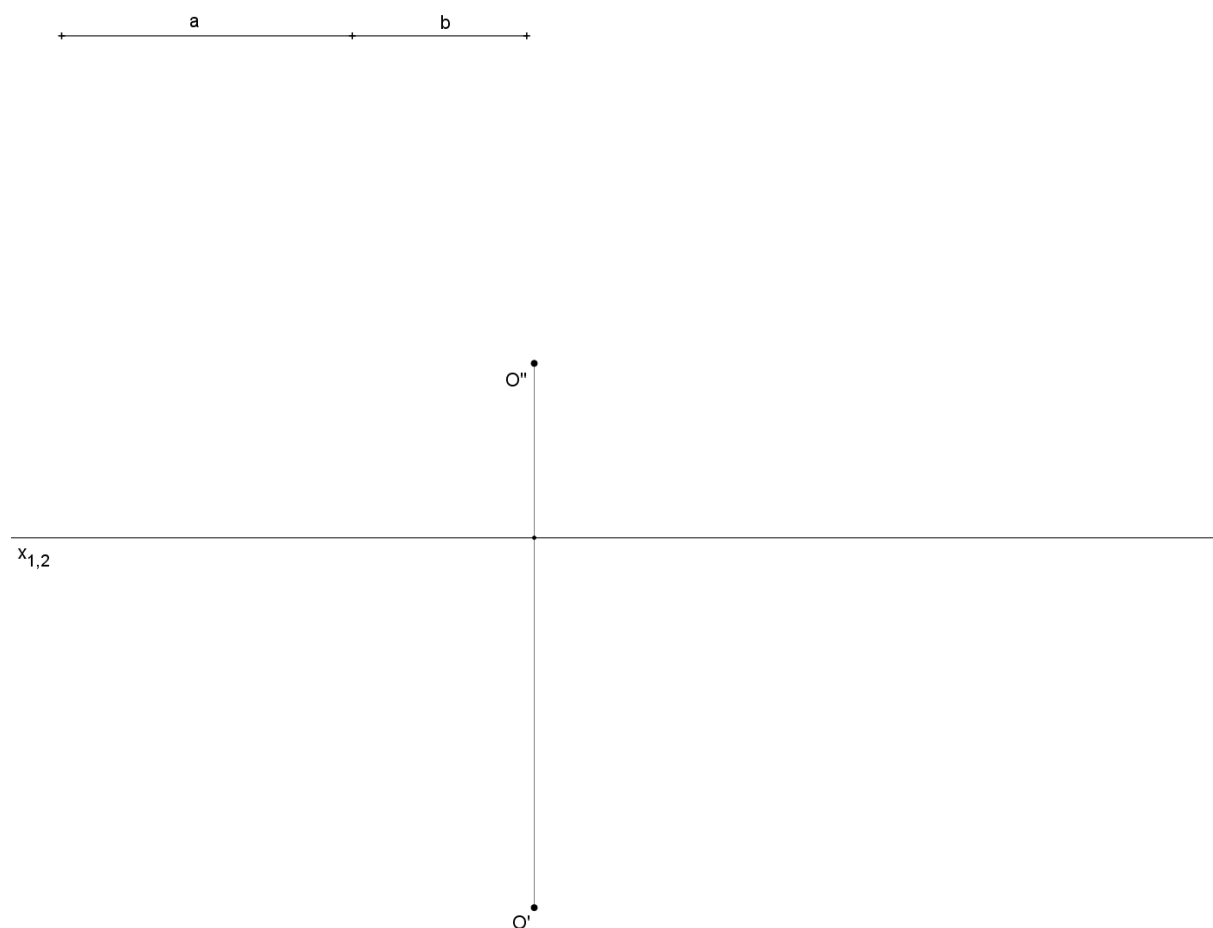
A felületre vetítőhengert/fényhengert illesztünk, ezért a lehetséges képkontúr/vetett árnyék egy elliptikus henger síkmetszete: egy ellipszis.



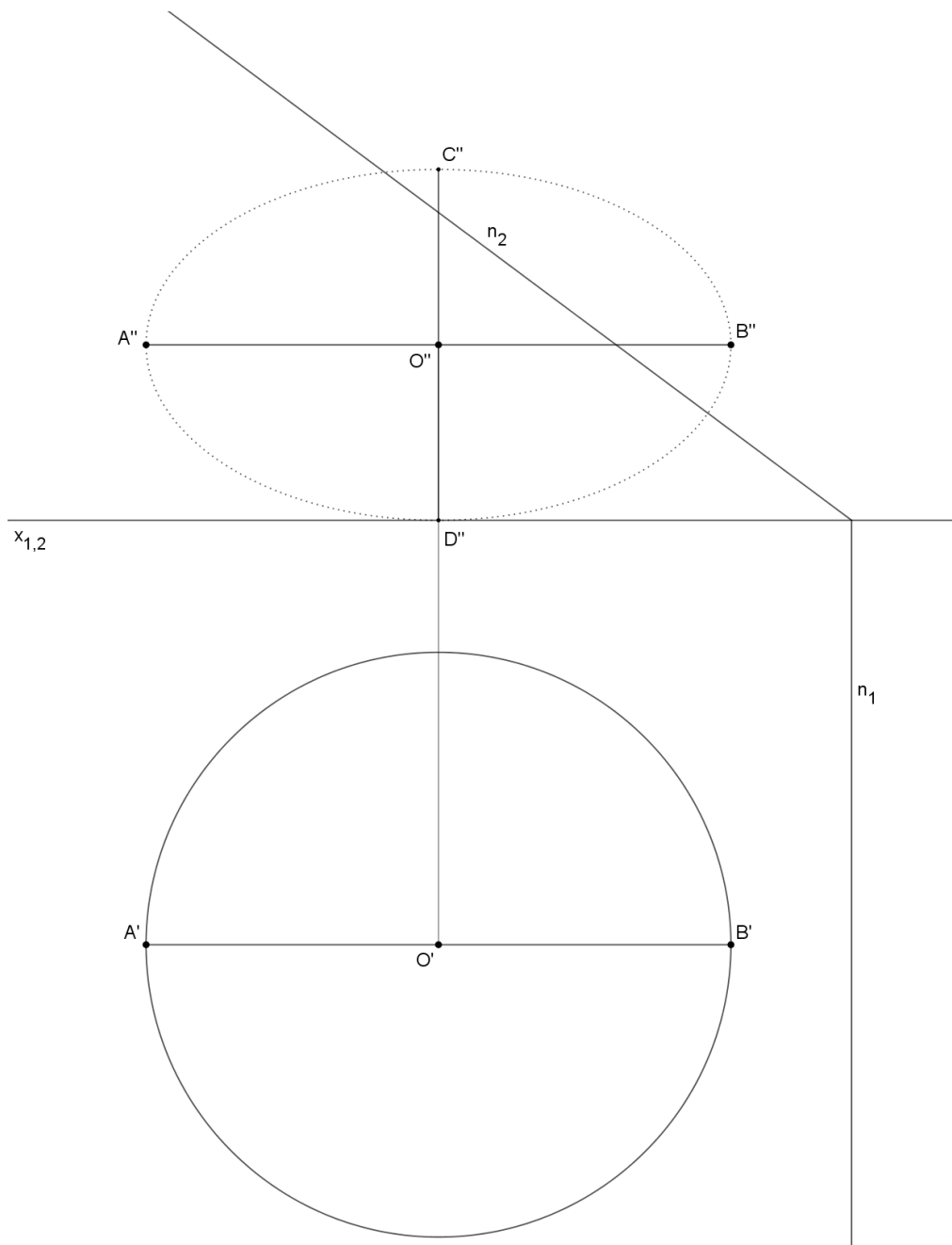
Alapvető szerkesztések

Adott egy forgásellipszoid középpontja és meridiánellipszisének tengelyei Monge-projekcióban úgy, hogy forgástengelye egy első vetítőegyenes. Szerkesszük meg az ellipszoid két képét, továbbá egy tetszőleges pontját!

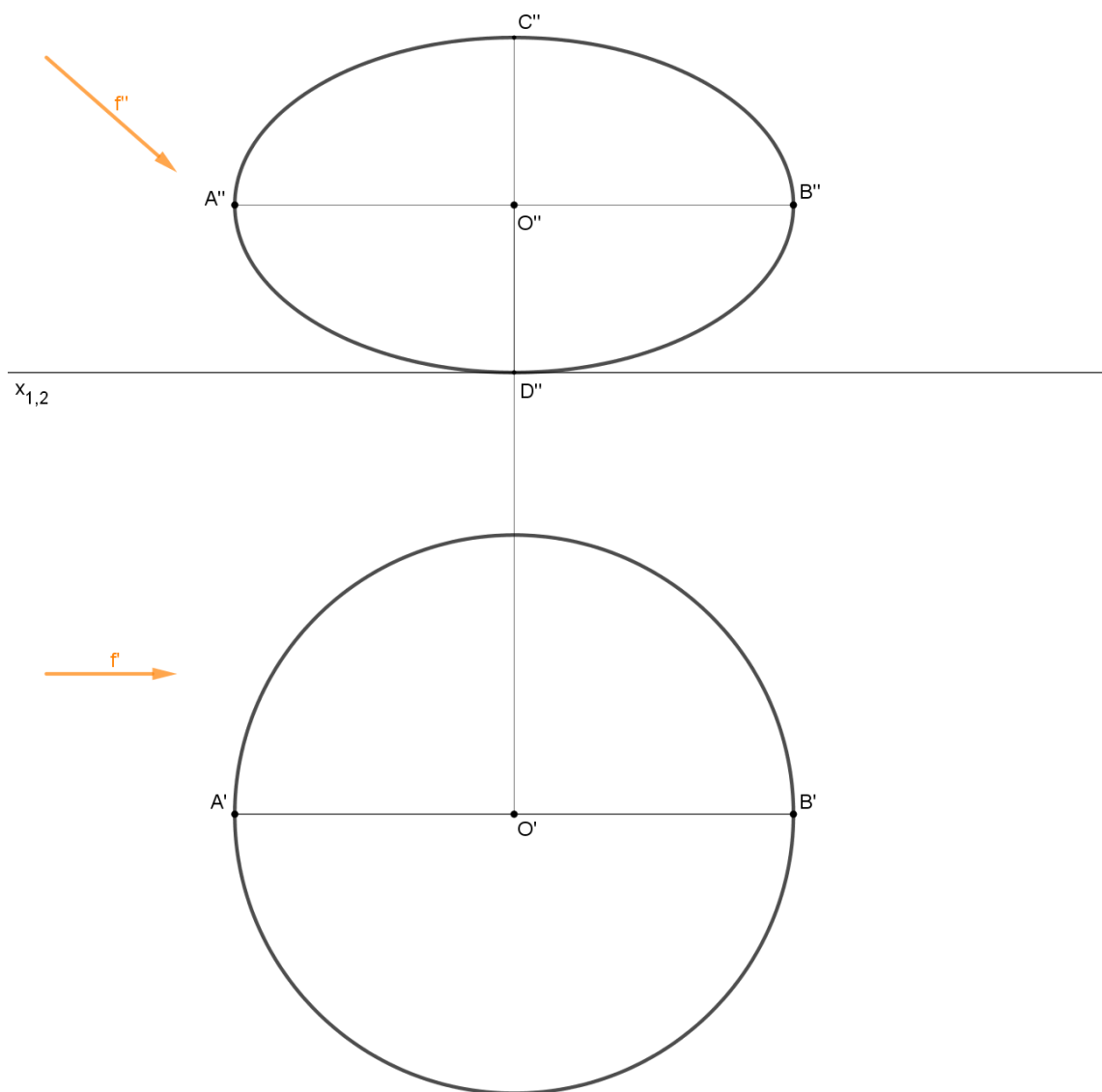
(Extra feladatként megszerkeszthető az ellipszoid adott pontbeli érintősíkja is.)



Adott egy forgásellipszoid Monge-projekcióban és egy második vetítősík. Szerkesszük meg a síkmetszetet!



Adott egy forgásellipszoid Monge-projekcióban és egy fénysugárirány. Szerkesszük meg az ellipszoid önárnyékhatárát és vetett árnyékát!

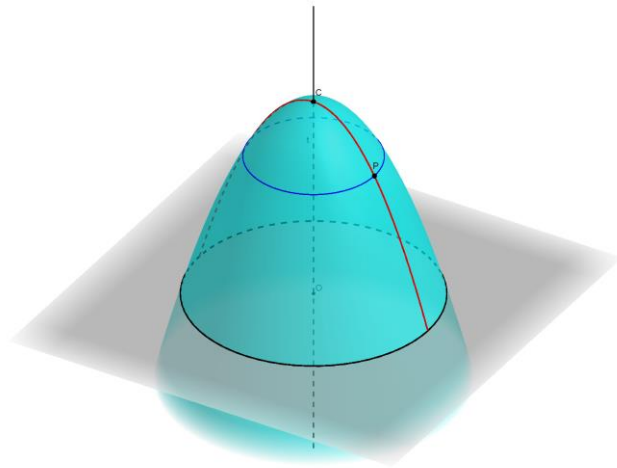
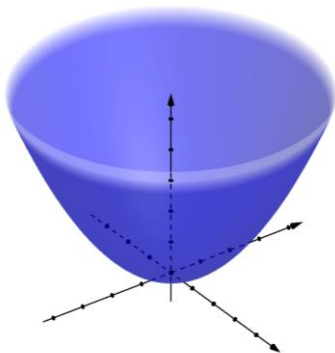


9. Paraboloid

Az előadás során csak forgásfelületként előállítható paraboloidokkal foglalkozunk.

Forgásparaboloid származtatása

Szintetikusán: egy parabolát a tengelye körül megforgatva forgásparaboloidot kapunk.



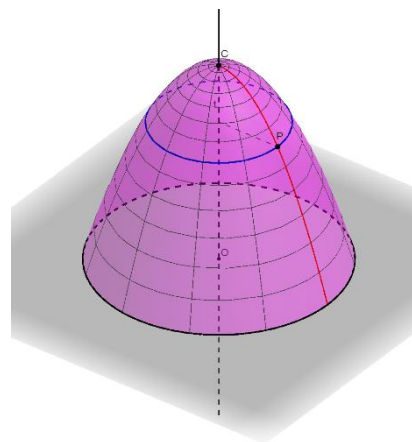
Analitikusan (ha a paraboloid csúcsa a z tengelyen c magasságban van, az $[x,y]$ síkot az r sugarú körben metszi):

paraméteresen:

$$F(u, v) = \left(u \cdot \cos v, u \cdot \sin v, c \cdot \left(1 - \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right) \right)$$

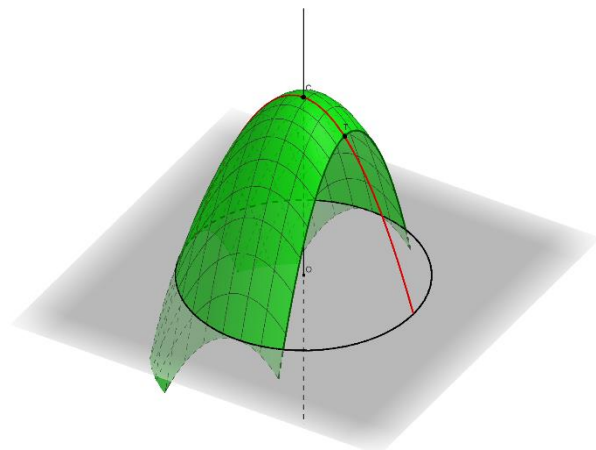
$$u \in [0, r], \quad v \in [0, 2\pi]$$

implicit egyenlettel: $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z}{c} = 1$



Elhelyezés a felületek rendszerében:

- másodrendű felület
- forgásfelület
- translációs felület



Alapvető kapcsolódó térelemek

(középpont: a tengely végtelen távoli pontja)

tengely:

csúcspont:

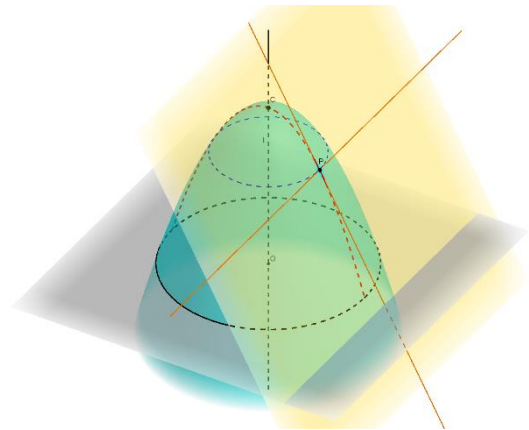
fókusz:

vezérsík:

szimmetriasíkok:

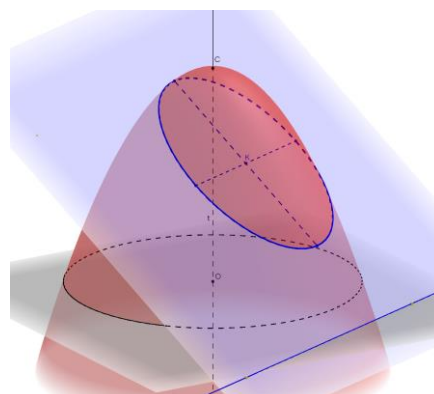
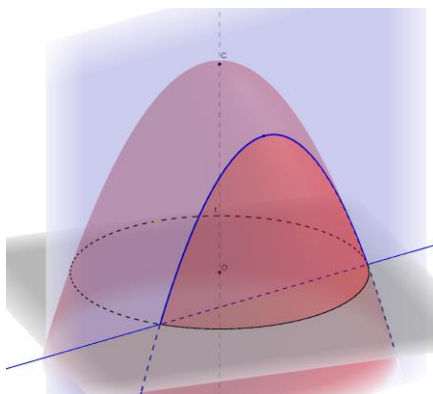
Felületi pontok, pontbeli érintősík

- Minden pontja elliptikus pont.
- Pontbeli érintősík előállítás:



Lehetséges síkmetszetek

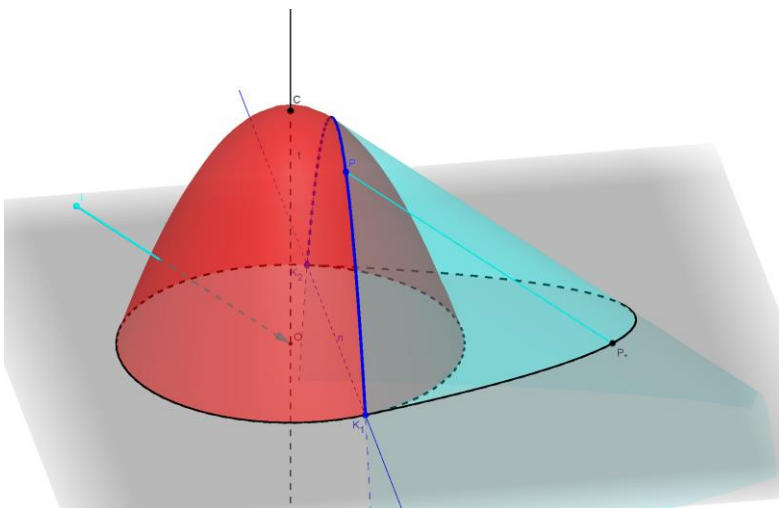
- parabola
- kör
- ellipszis – *Tengelyirányú merőleges vetülete kör.*
- egyetlen pont



Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

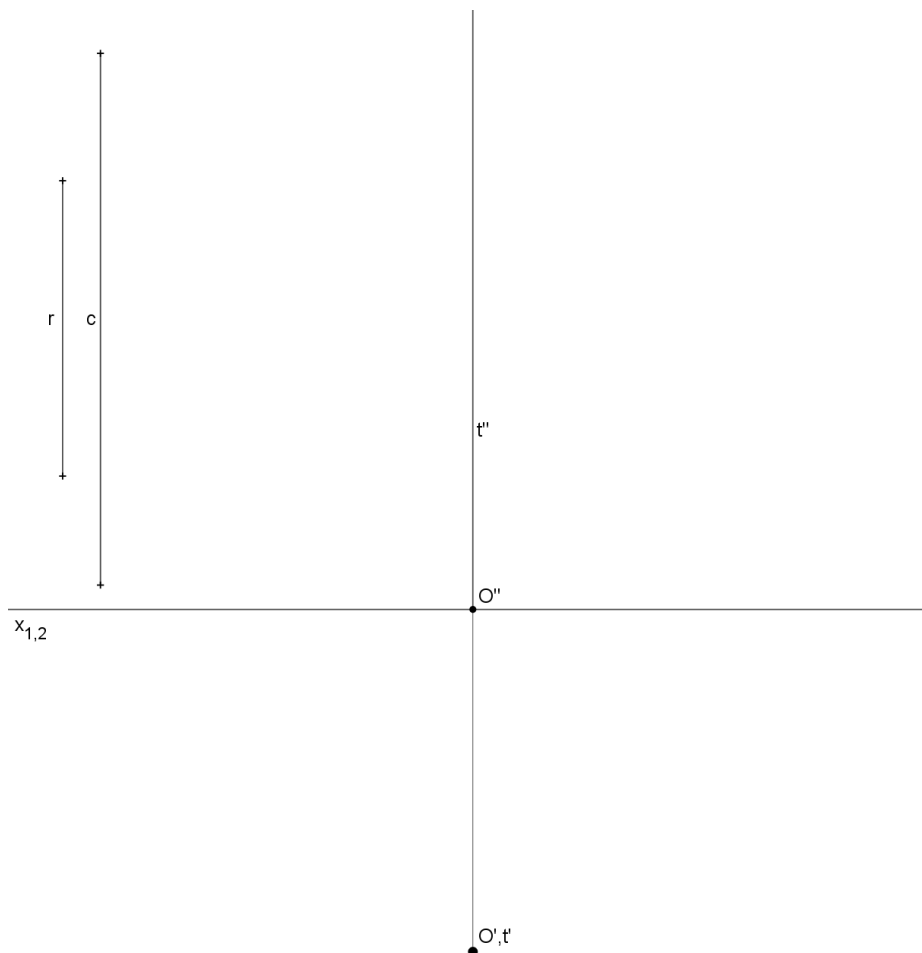
Párhuzamos vetítés/fénysugár esetén parabola, amelynek (kontúr-/önárnyékhatár-)síkja a tengellyel párhuzamos.

A felületre parabolikus vetítőhengert/fényhengert illesztünk, ezért a lehetséges képkontúr/vetett árnyék egy parabola.

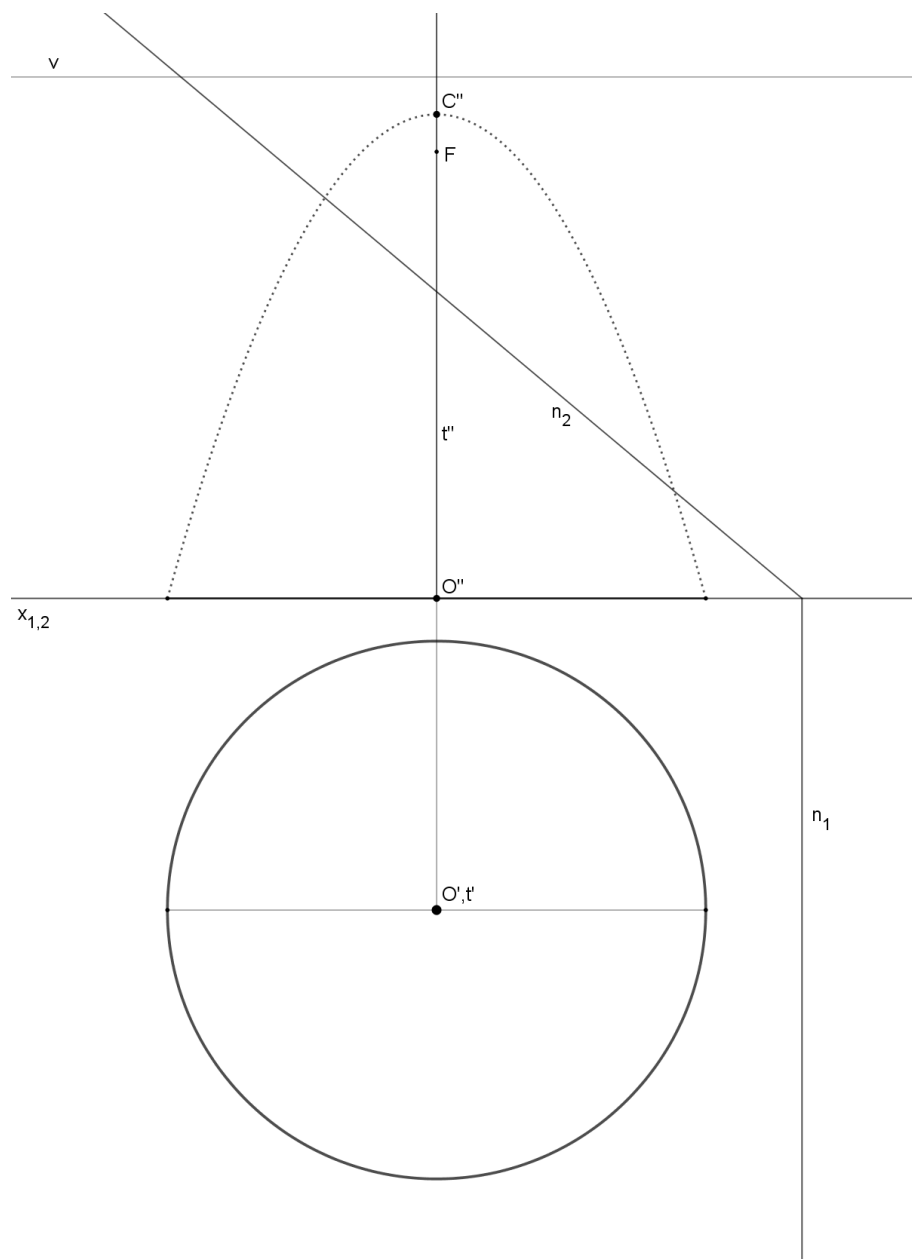


Alapvető szerkesztések

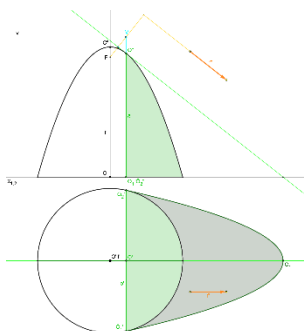
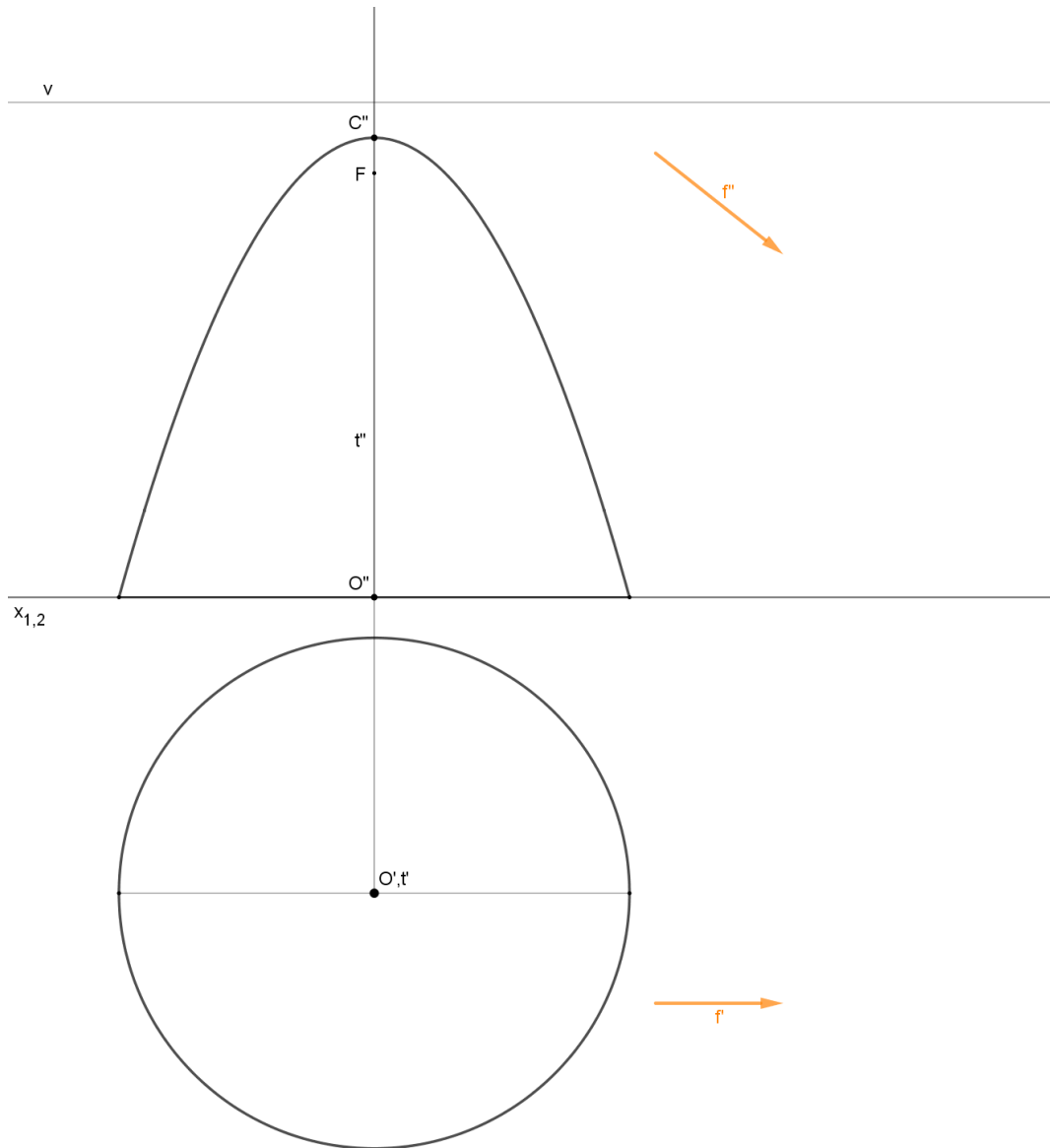
Adott egy forgáspárolloid tengelye, egyik paralelkörének O középpontja, r sugara, valamint a kör és a csúcspon c távolsága Monge-projekcióban. Szerkesszük meg a paraboloid egy tetszőleges pontját! (Szorgalmi feladatként a pontbeli érintősíkot is.)



Adott egy forgásparaboloid tengelye, egyik paralelkörének O középpontja, sugara, valamint a kör és a csúcspont távolsága Monge-projekcióban. Ismert az ezekből megszerkeszthető fókusz és vezéregyenes. Adott továbbá egy második vetítősík. Szerkesszük meg a paraboloid síkmetszetét!



Adott egy forgáspárololoid tengelye, egyik paralelkörének O középpontja, sugara, valamint a kör és a csúcpont távolsága Monge-projekcióban. Ismert az ezekből megszerkeszthető fókusz és vezéregyenes. Adott továbbá egy másodikkal párhuzamos fénysugárirány. Szerkesszük meg a paraboloid önárnyékhatárát és az első képsíkra vetett árnyékát!



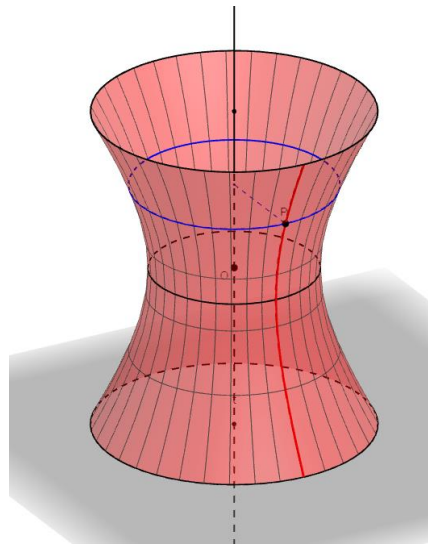
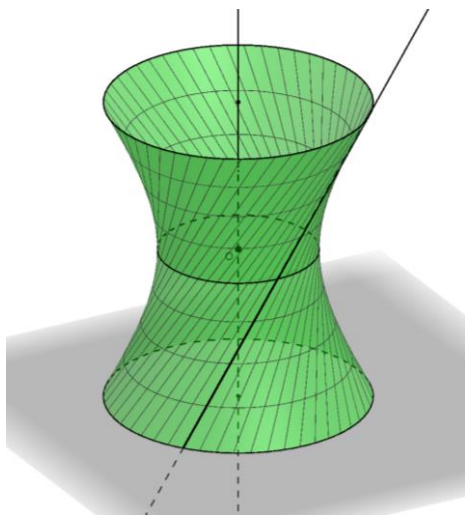
10. Egyköpenyű hiperboloid

Az előadás során csak forgásfelületként előállítható hiperboloidokkal foglalkozunk.

Egyköpenyű forgáshiperboloid származtatása

Szintetikusán:

- Adott egyenes körül egy ahhoz képest kitérő helyzetű egyenest megforgatunk.
- Egy hiperbolát a képzetes tengelye körül megforgatunk.



Analitikusan (ha a hiperboloid O középpontja a z tengelyen m magasságban van, az ún. torokkörének sugara r_t és az $[x,y]$ síkot az r_a sugarú körben metszi):

paraméteresen (pl.):

$$F(u, v) = \left(r_t \cdot \operatorname{ch} u \cdot \cos v, r_t \cdot \operatorname{ch} u \cdot \sin v, \frac{m \cdot r_t}{\sqrt{r_a^2 - r_t^2}} \cdot \operatorname{sh} u + m \right)$$

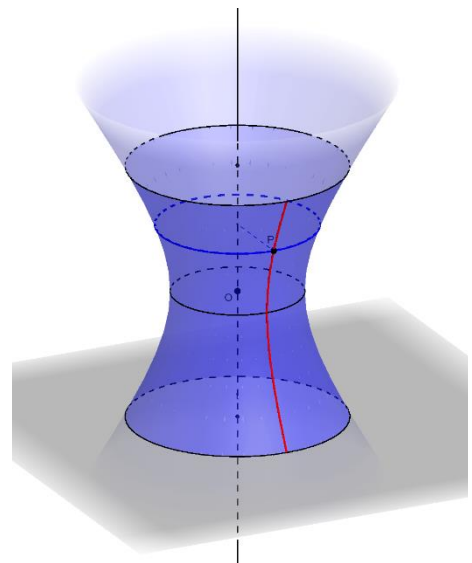
$$u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi]$$

implicit egyenlettel:

$$x^2 + y^2 - \frac{r_a^2 - r_t^2}{m^2} \cdot (z - m)^2 = r_t^2$$

Elhelyezés a felületek rendszerében:

- másodrendű felület
- forgásfelület
- nem kifejezhető vonalfelület (torzfelület)



Alapvető kapcsolódó térelemek

középpont:

tengely:

torokkör:

(A tengely és az alkotó közötti legrövidebb távolságot mutató szakasz, az ún. normáltranszverzális a torokkör adott alkotóhoz tartozó sugara.)

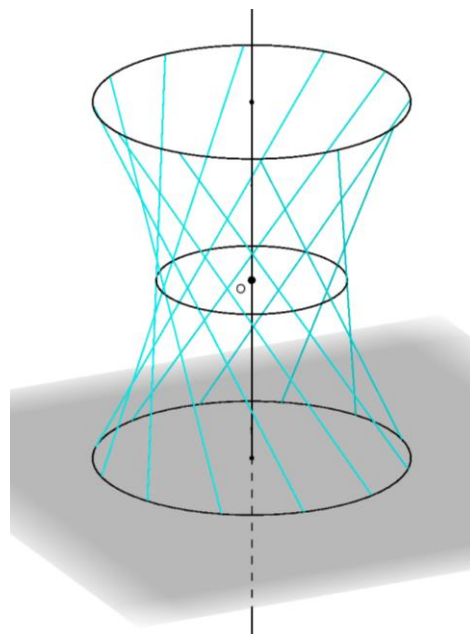
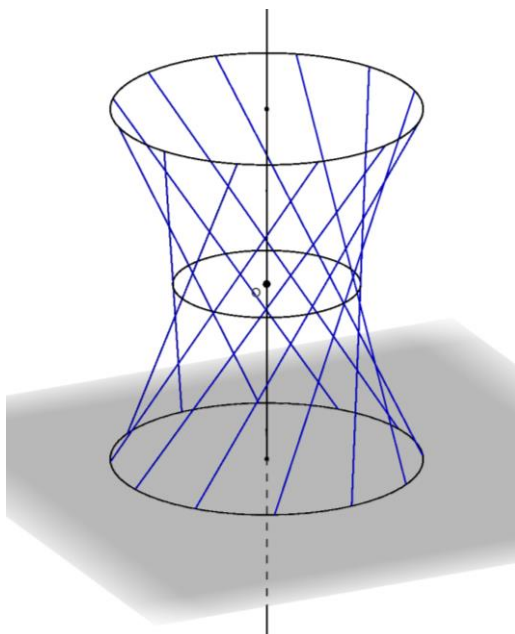
esetlegesen alapkör és fedőkör:

szimmetriasíkok:

alkotók, alkotóseregek:

azonos alkotóseregben lévő egyenesek:

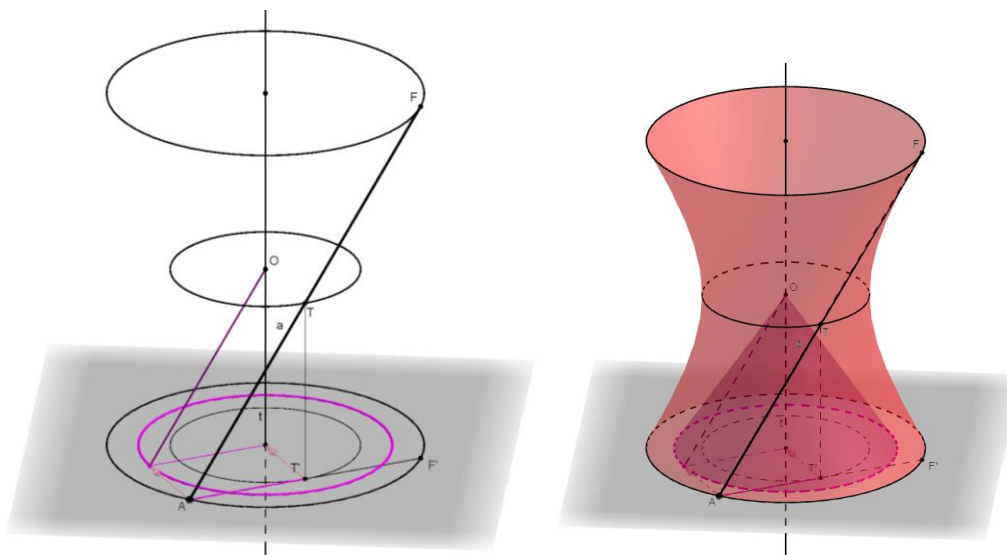
különböző alkotóseregben lévő egyenesek:



aszimptotikus kúp:

-
-

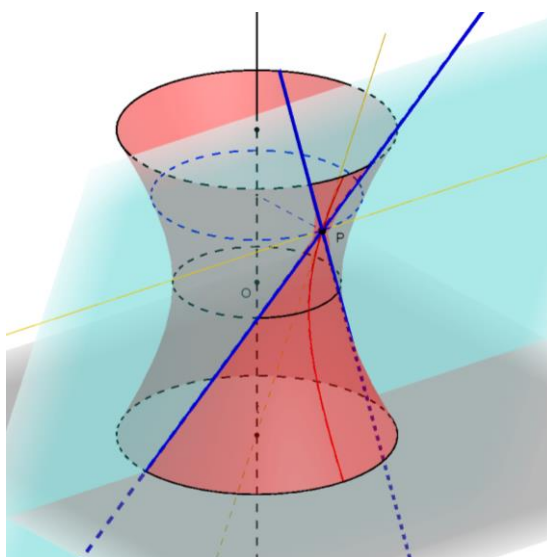
(A végtelen távoli síkot a hiperboloid és az aszimptotikus kúp ugyanabban a körben metszi.)



Felületi pontok, pontbeli érintősík

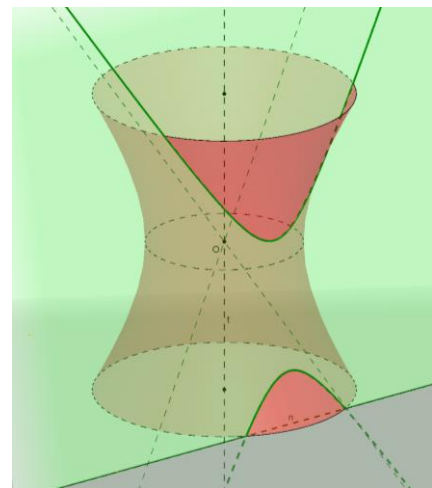
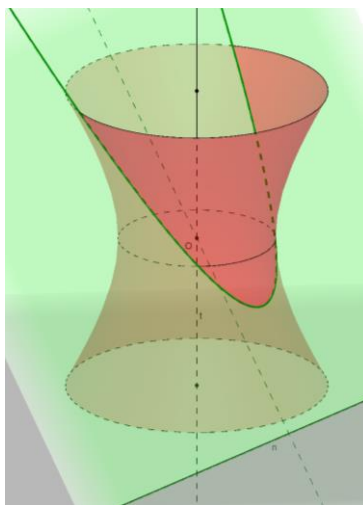
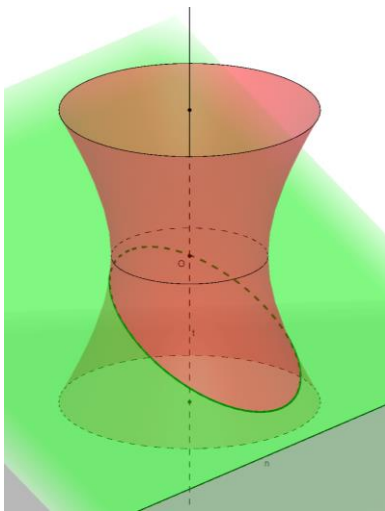
- Minden pontja hiperbolikus pont.
- Pontbeli érintősík előállítása:

Minden ponton áthalad a két alkotósereg egy-egy alkotója. Ez a két alkotó egy síkot feszít fel, a felület adott pontbeli érintősíkját.

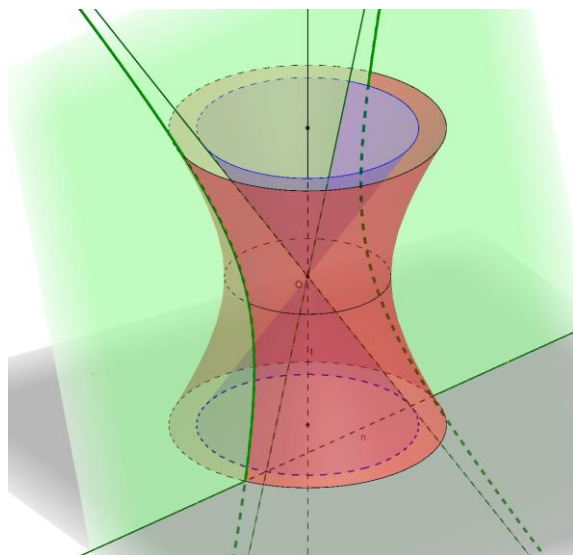
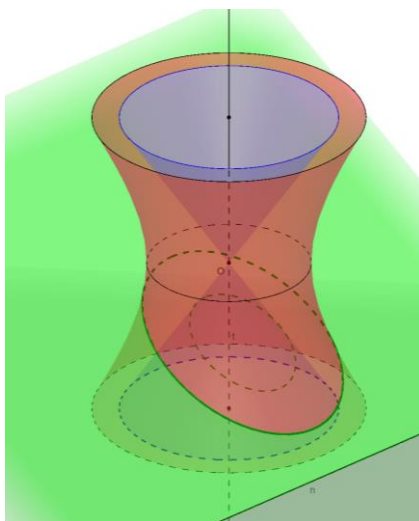


Lehetséges síkmetszetek

- kör
- ellipszis
- parabola
- hiperbola
- párhuzamos egyenespár
- metsző egyenespár



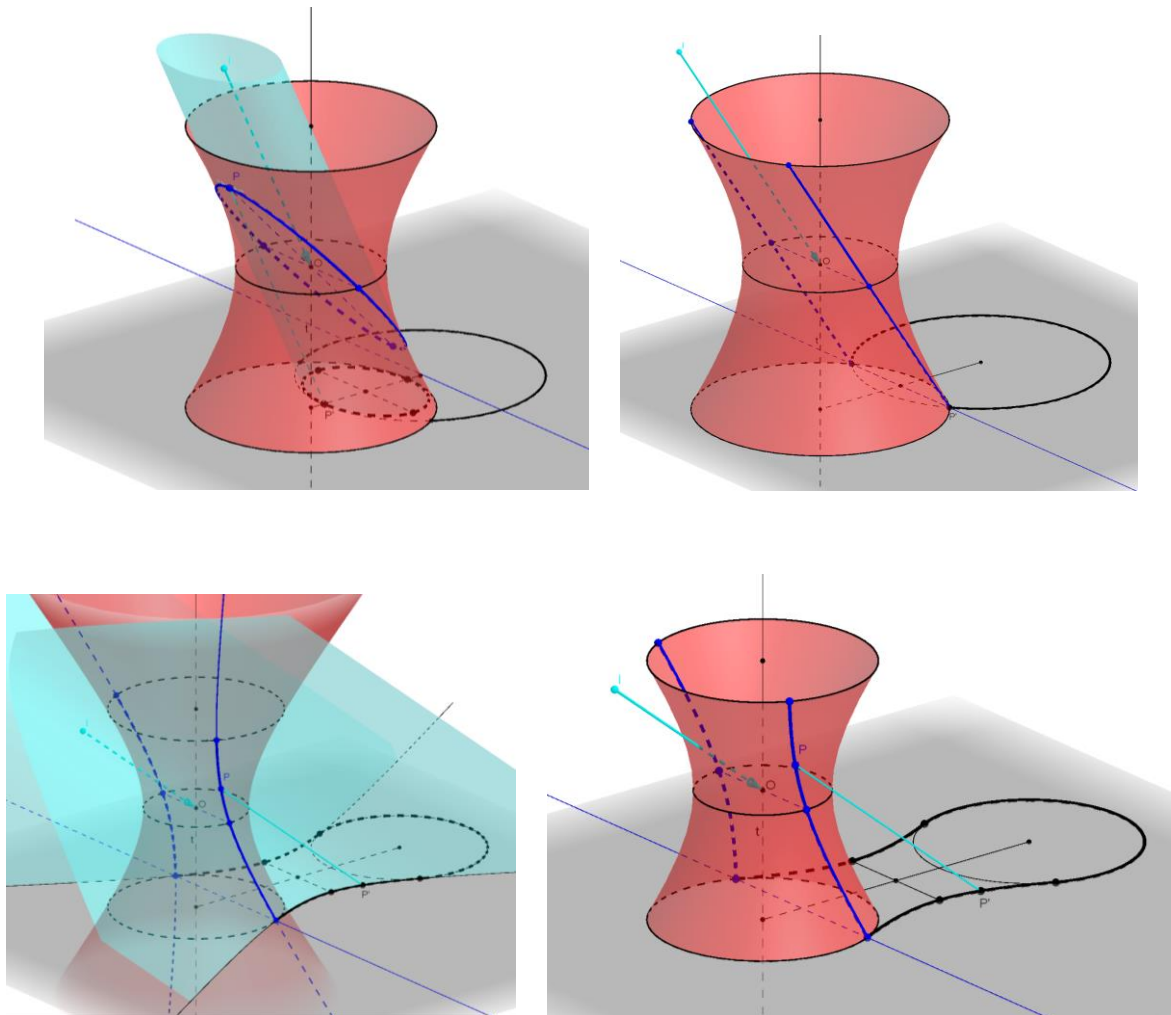
Egy sík a hiperboloidot és aszimptotikus kúpját ugyanolyan végtelen távoli ponttal rendelkező görbékben metszi (pl. egy-egy ellipszis, de lehetséges metsző egyenespár + hiperbola kombináció is).



Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

Párhuzamos vetítés/fénysugár esetén a kontúrgörbe ellipszis, párhuzamos egyenespár vagy hiperbola, amelynek (kontúr-/önárnyékhatár-)síkja a felület középpontján áthalad. A felületre vetítőhengert/fényhengert illesztünk, ezért a lehetséges képkontúr/vetett árnyék egy ellipszis, pontpár vagy hiperbola.

Párhuzamos vetítés (fénysugár) esetén a hiperboloid és aszimptotikus kúpjának kontúrsíkja (önárnyékhatár-síkja) egybeesik.

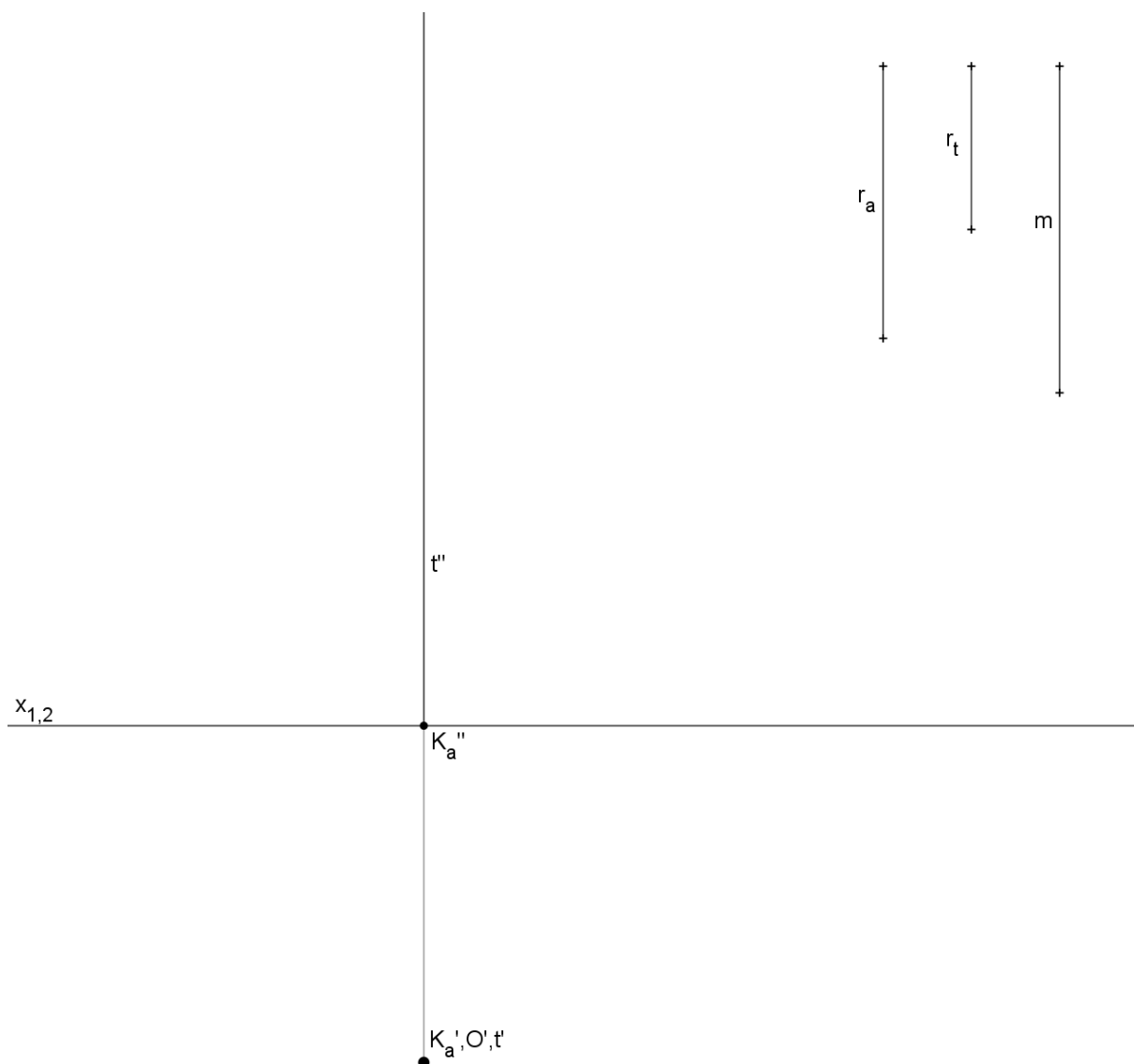


Gyakorlatban sokszor használt megoldás:

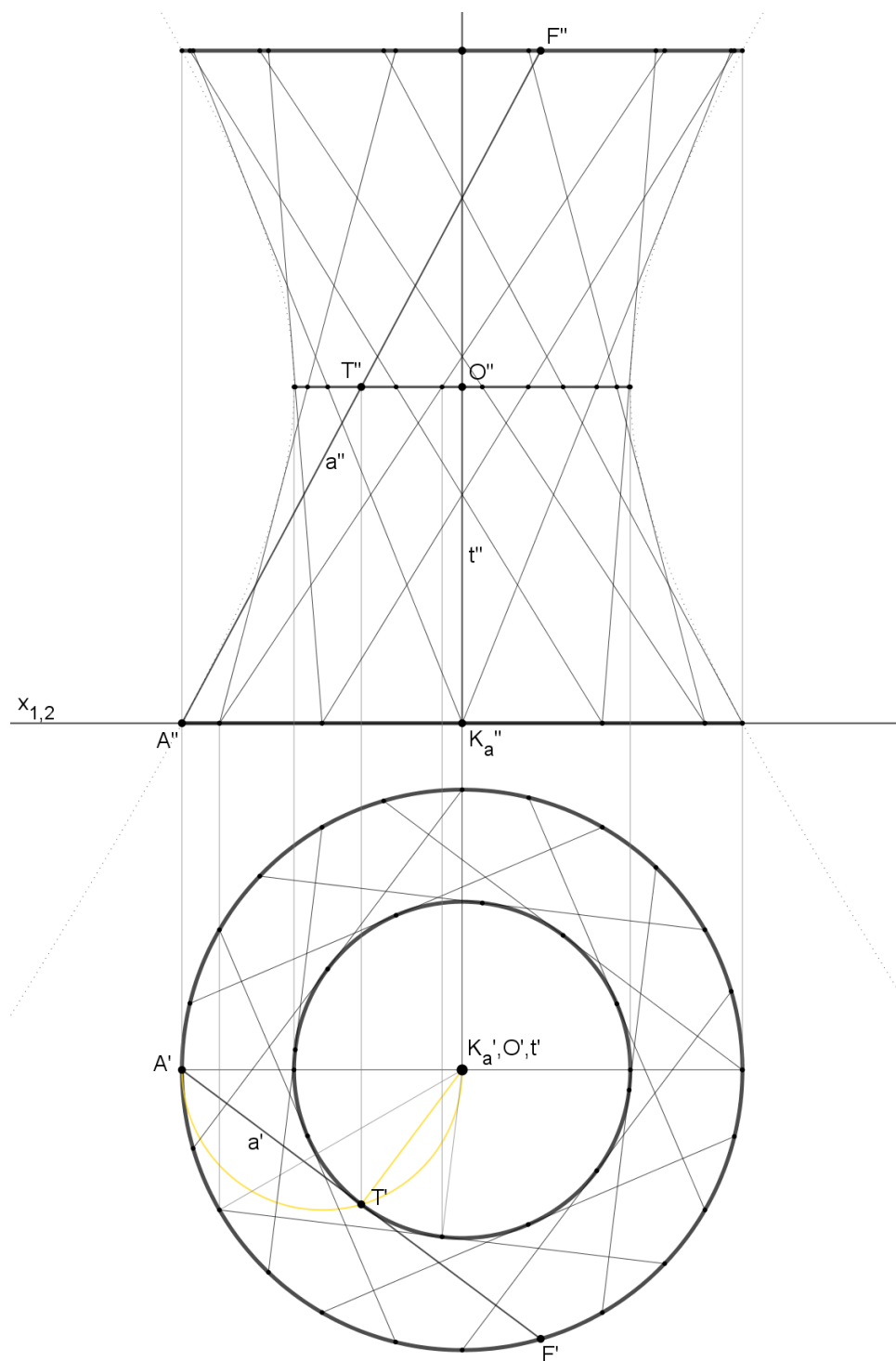
Kontúrpontban az érintősík vetítősík. → Az érintősíkokat minden pontban két alkotó feszíti fel.
→ Keressük azokat az alkotókat, amelyeknek ugyanaz a vetítősíkja. → A két alkotó metszéspontja kontúrpont.

Alapvető szerkesztések

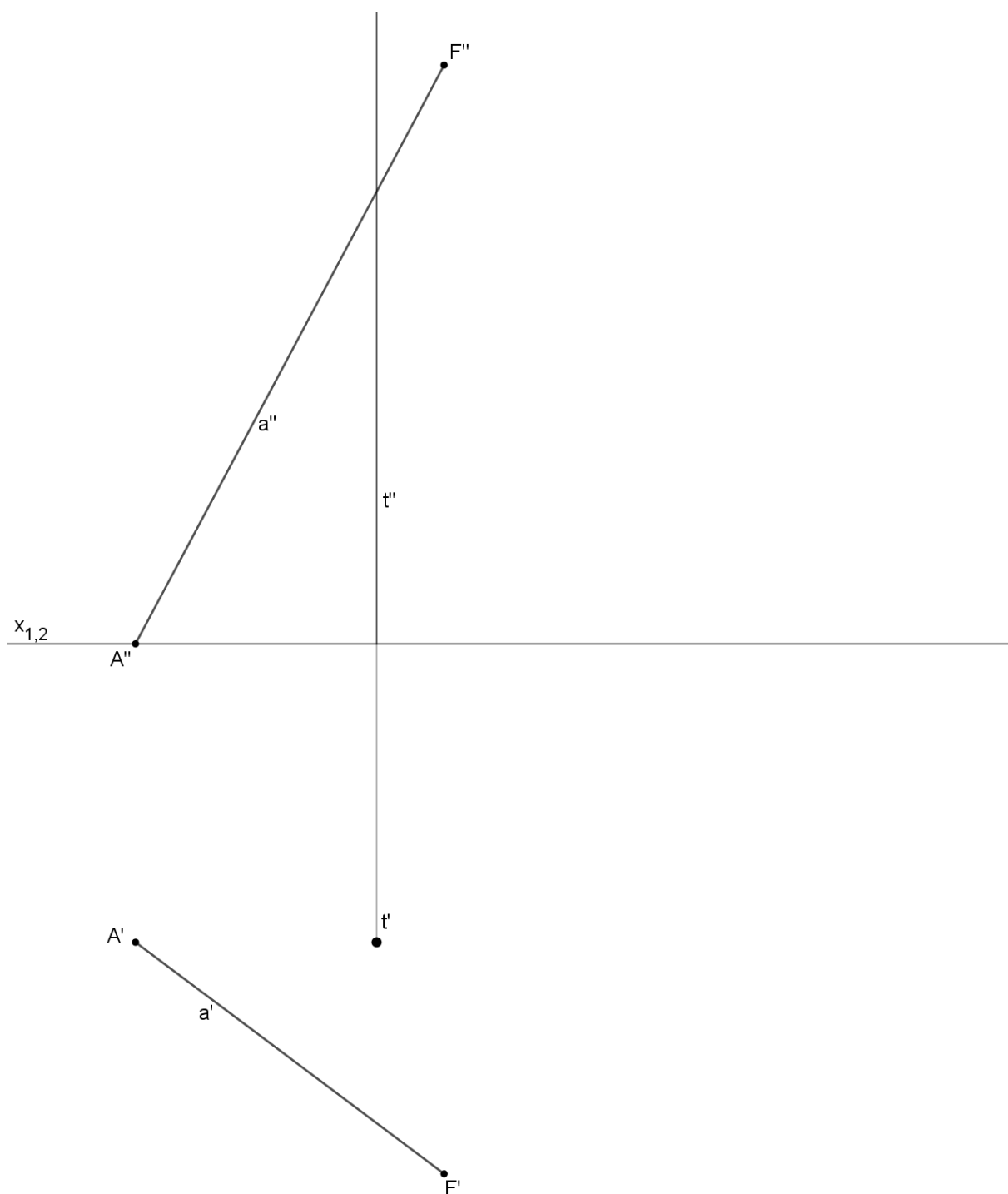
Adott egy egyköpenyű forgáshiperboloid Monge-projekcióban úgy, hogy a hiperboloid alapköre az első képsíkban van, annak középpontja K_a , sugara r_a . A hiperboloid tengelye első vetítősugár. Ismert továbbá a középpontjának magassága az első képsíktól (m), valamint a torokkörének sugara (r_t). Szerkesztendő egy sereghez tartozó 12 db alkotója, az egyik alkotón lévő tetszőleges pontja, valamint a pontbeli érintősík is.



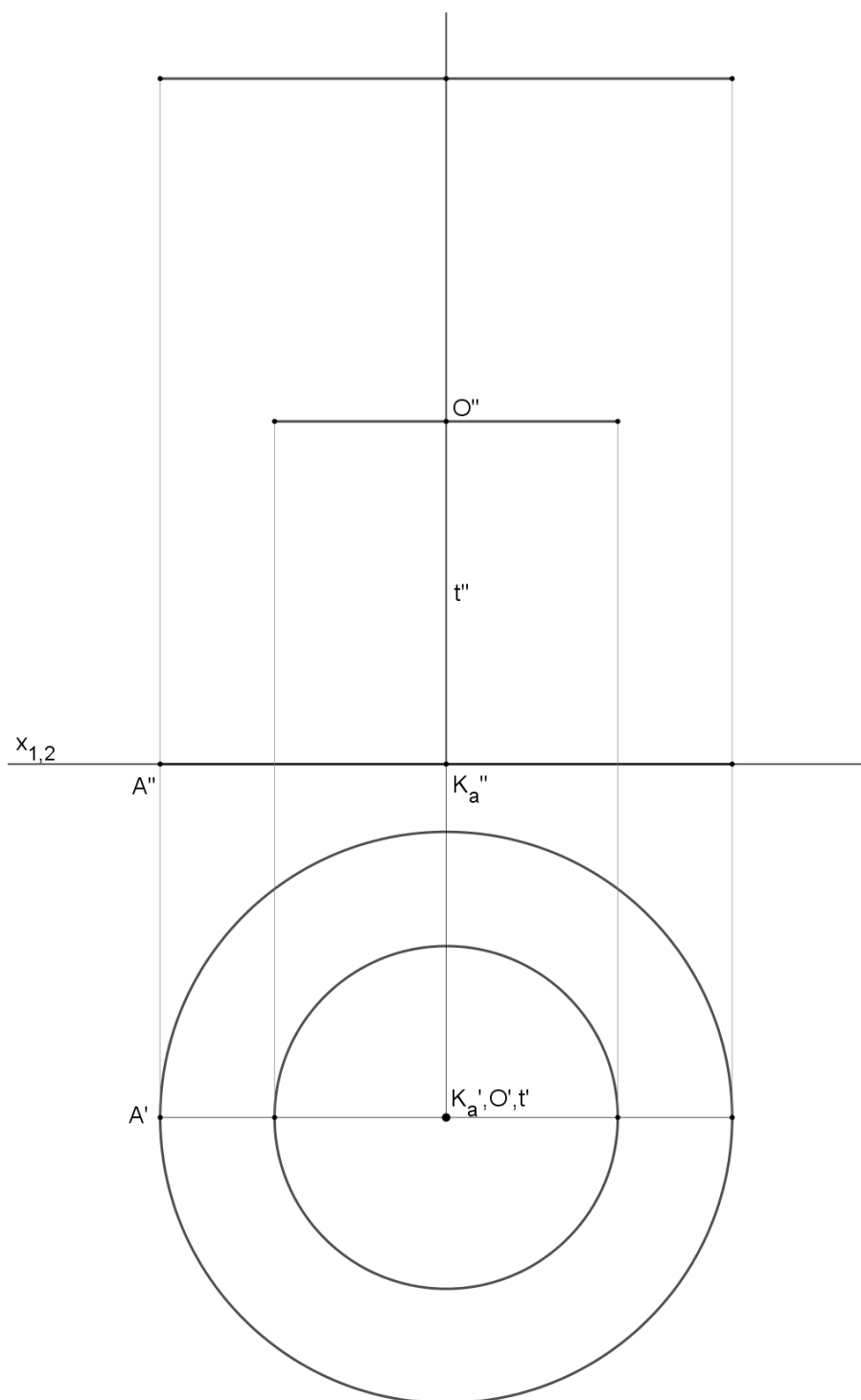
Adott az előző feladatban szereplő egyköpenyű hiperboloid Monge-projekcióban. Határozzuk meg a felület második kontúrgörbáját az ábrázolt alkotók kontúrpointjaival!



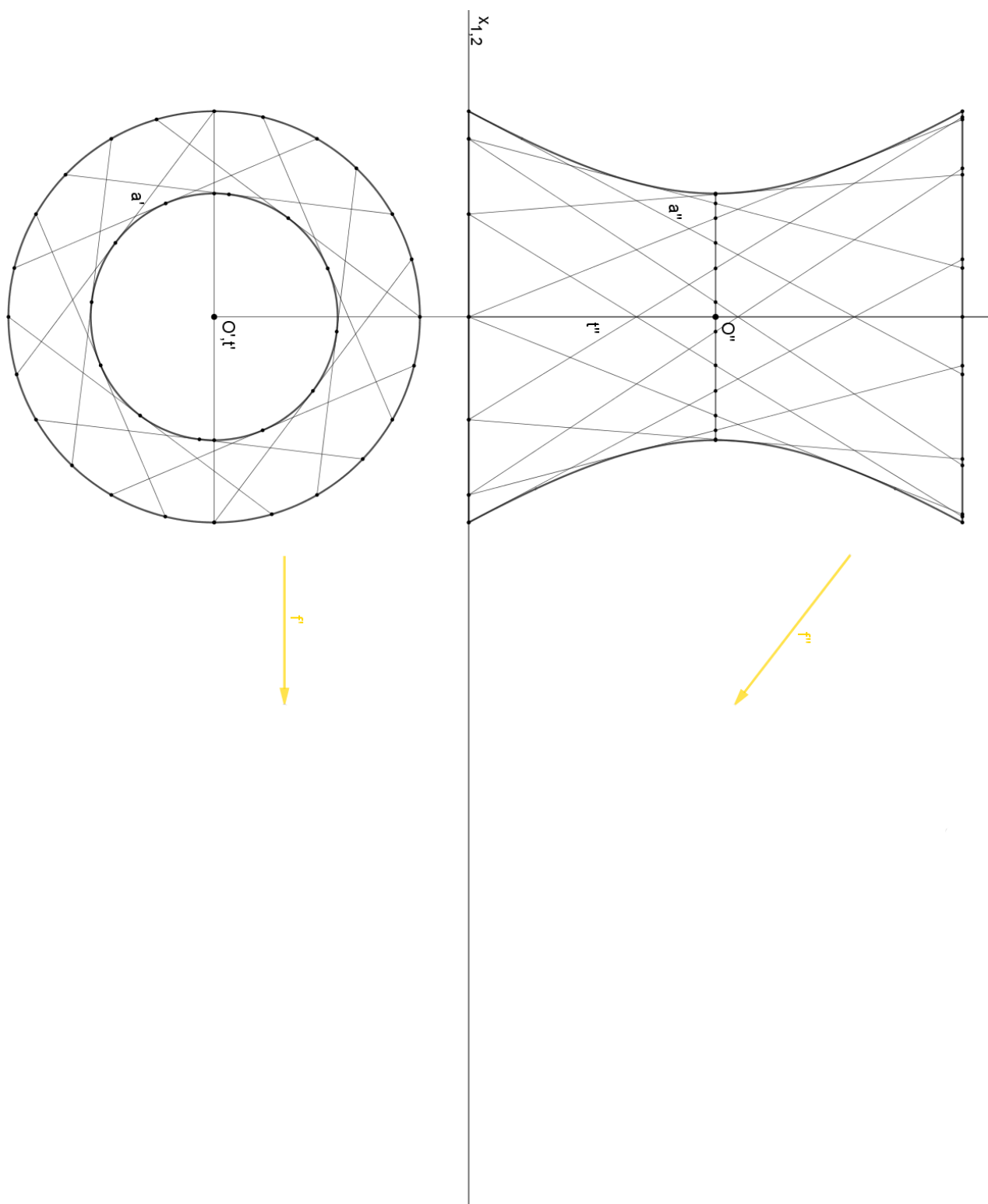
Házi feladat: Szerkesztendő Monge-projekcióban az egyköpenyű forgáshiperboloid alap-, fedő- és torokköre, ha ismert a tengelye és egyik alkotójának alap- és fedőkör közé eső szakasza.



Adott egy egyköpenyű hiperboloid alap-, fedő- és torokköre Monge-projekcióban. Szerkesztendő a hiperboloid aszimptotikus kúpjának mindkét képe.



Adott egy egyköpenyű hiperboloid Monge-projekcióban, továbbá ismert egy fénysugárirány két képével. Szerkesszük meg a hiperboloid önárnyékát és vetett árnyékát úgy, hogy a fedőkörrel lezárjuk a felületet (azaz nem látunk bele)!



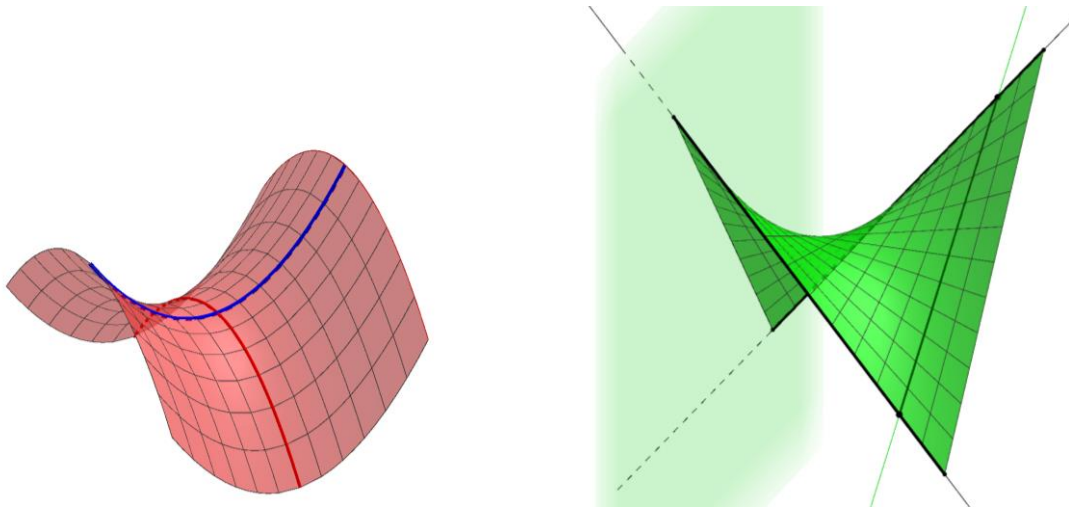
11. Hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület)

Nyeregfelület származtatása

Szintetikusán:

- Egy parabolát egy arra merőleges síkú és ellentétes tengelyállású parabola mentén mozgatunk. A mozgó parabola csúcspontja a pályául szolgáló parabolára illeszkedik.
- Adott egy kitérő egyenespár és egy azokat metsző sík. A két egyenes adott síkkal párhuzamos transzverzálisai* egy nyeregfelületet adnak.

* Két egyenes transzverzálisai: mindkét egyenest metsző egyenes.



Analitikusan (az origót tartalmazó nyeregfelület, amelynek alkotói az $[x,z]$, illetve az $[y,z]$ síkokkal párhuzamosak):

paraméteresen:

$$F(u, v) = (u, v, uv), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

implicit egyenlettel:

$$z = xy$$

Elhelyezés a felületek rendszerében:

- másodrendű felület
- translációs felület
- nem kifejtető vonalfelület (torzfelület)

Alapvető kapcsolódó térelemek

alkotók, alkotóseregek:

azonos alkotóseregben lévő egyenesek:

különböző alkotóseregben lévő egyenesek:

Két-két alkotó által kapható torznégyszög a felületet egyértelműen meghatározza.

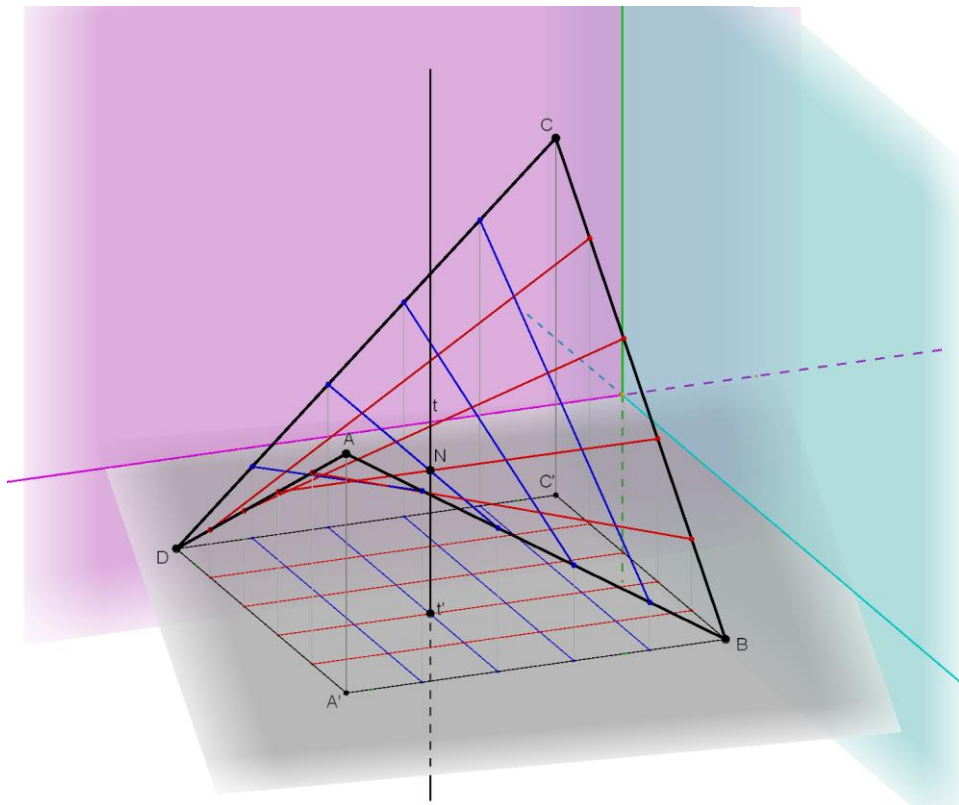
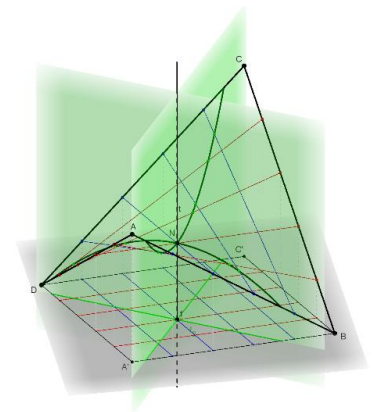
iránysíkok:

tengely:

nyeregpon (tengelypont):

(középpont: A tengely végtelen távoli pontja. Ebben a pontban a tér végtelen távoli síkja érinti a felületet.)

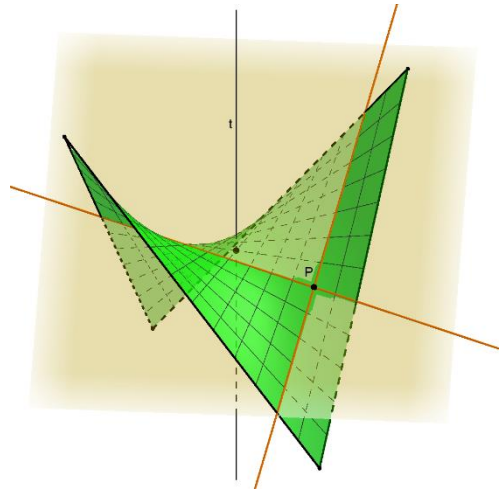
főmetszetek (szimmetriasíkok): Síkjaik egymásra merőlegesek.



Felületi pontok, pontbeli érintősík

- Minden pontja hiperbolikus pont.
- Pontbeli érintősík előállítás:

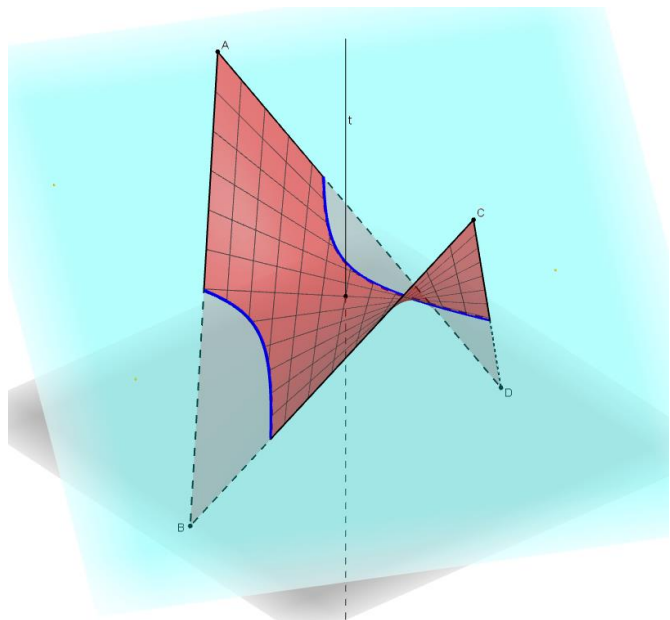
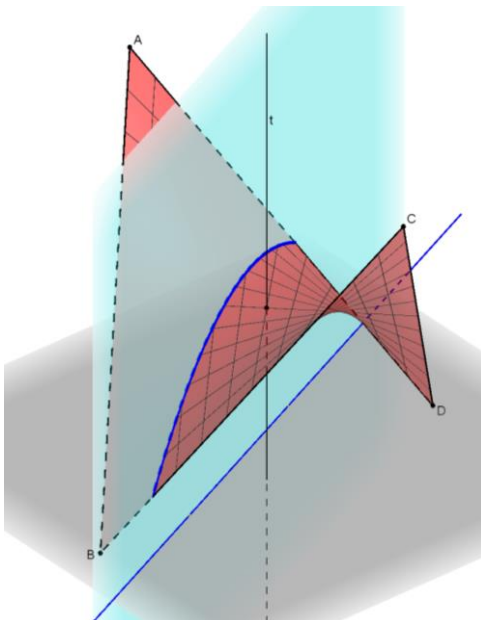
Minden ponton áthalad a két alkotósereg egy-egy alkotója. Ez a két alkotó egy síkot feszít fel, a felület adott pontbeli érintősíkját.



Lehetséges síkmetszetek

- parabola
- hiperbola
- metsző egyenespár
- egyetlen egyenes

A síkmetszeteket legkönnyebben a sík és az alkotóegyeneselek dőléspontjaival kaphatjuk meg.



Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

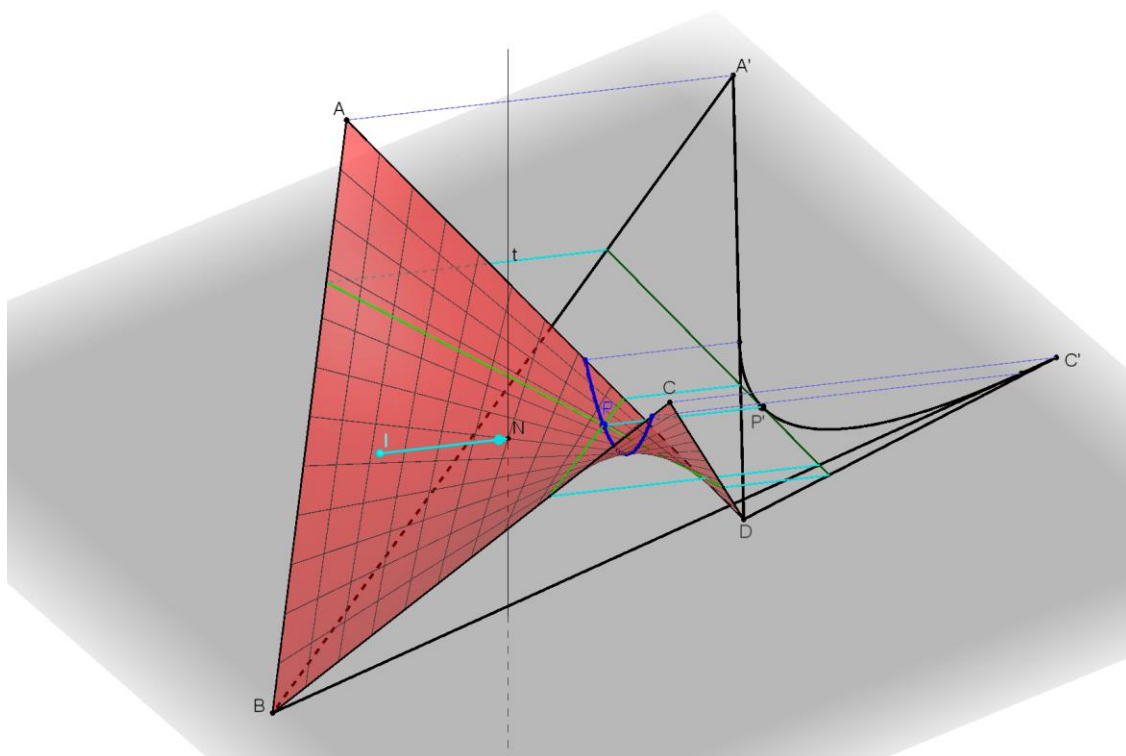
Párhuzamos vetítés/fénysugár esetén a kontúrsík/önárnyékhatár-sík a tengellyel párhuzamos, így a kontúrgörbe/önárnyékhatár-görbe parabola.

A felületre vetítőhengert/fényhengert illesztünk, ezért a lehetséges képkontúr/vetett árnyék egy parabola.

Gyakorlatban sokszor használt megoldás:

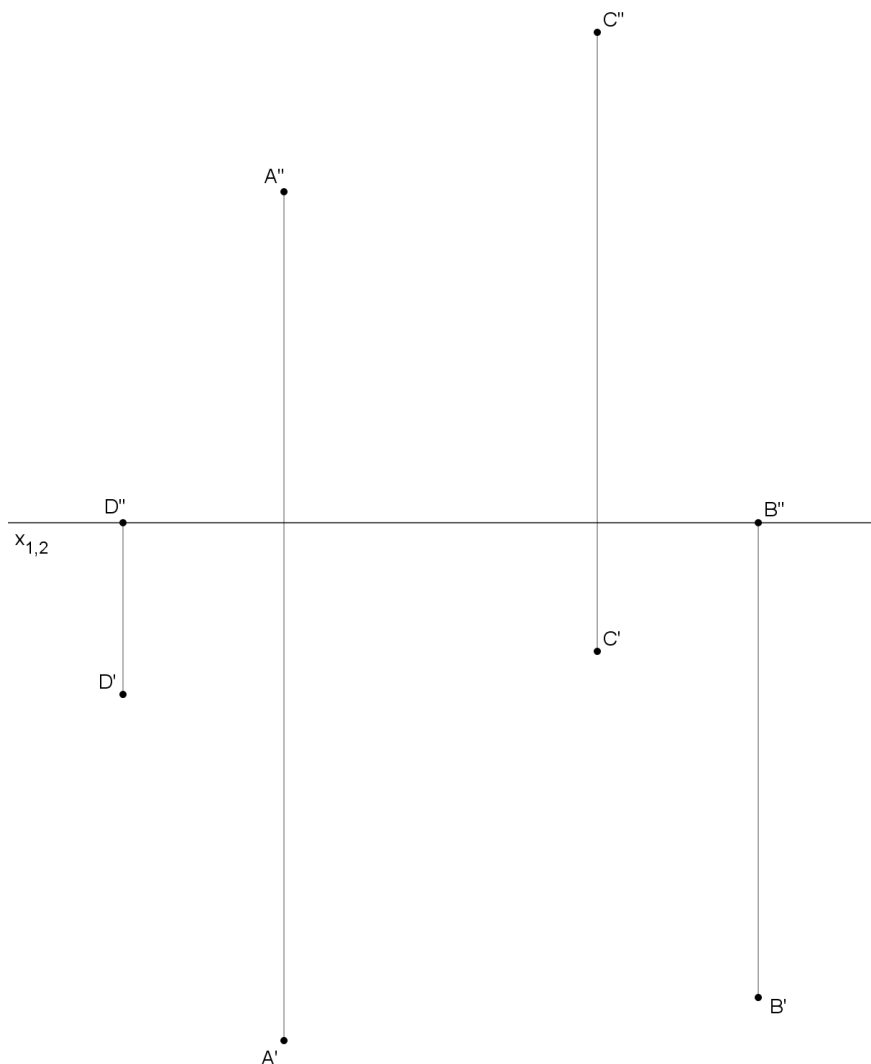
Kontúrpontban az érintősík vetítősík. → Az érintősíkokat minden pontban két alkotó feszíti fel.

→ Keressük azokat az alkotókat, amelyeknek ugyanaz a vetítősíkja. → A két alkotó metszéspontja kontúrpont.

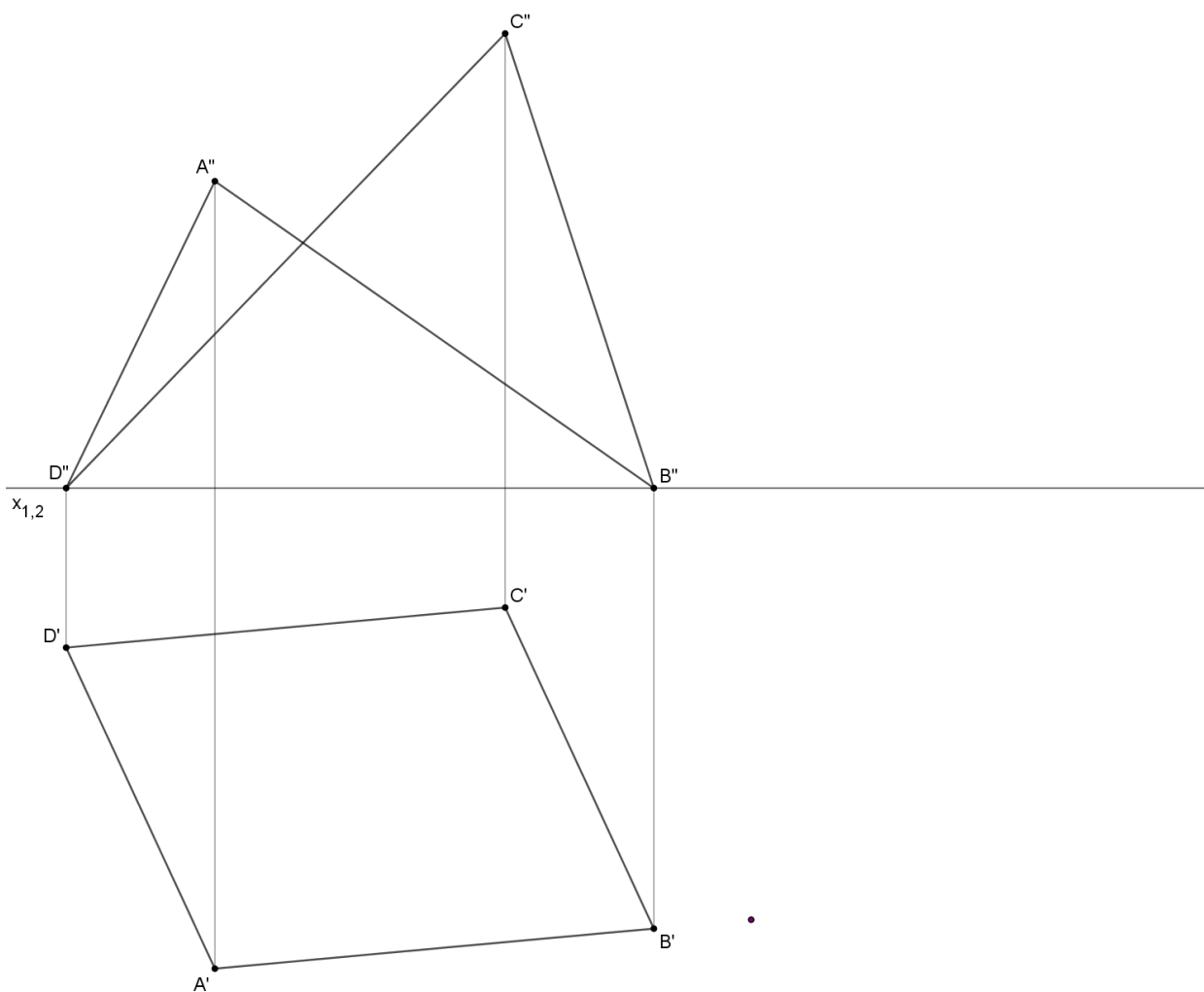


Alapvető szerkesztések

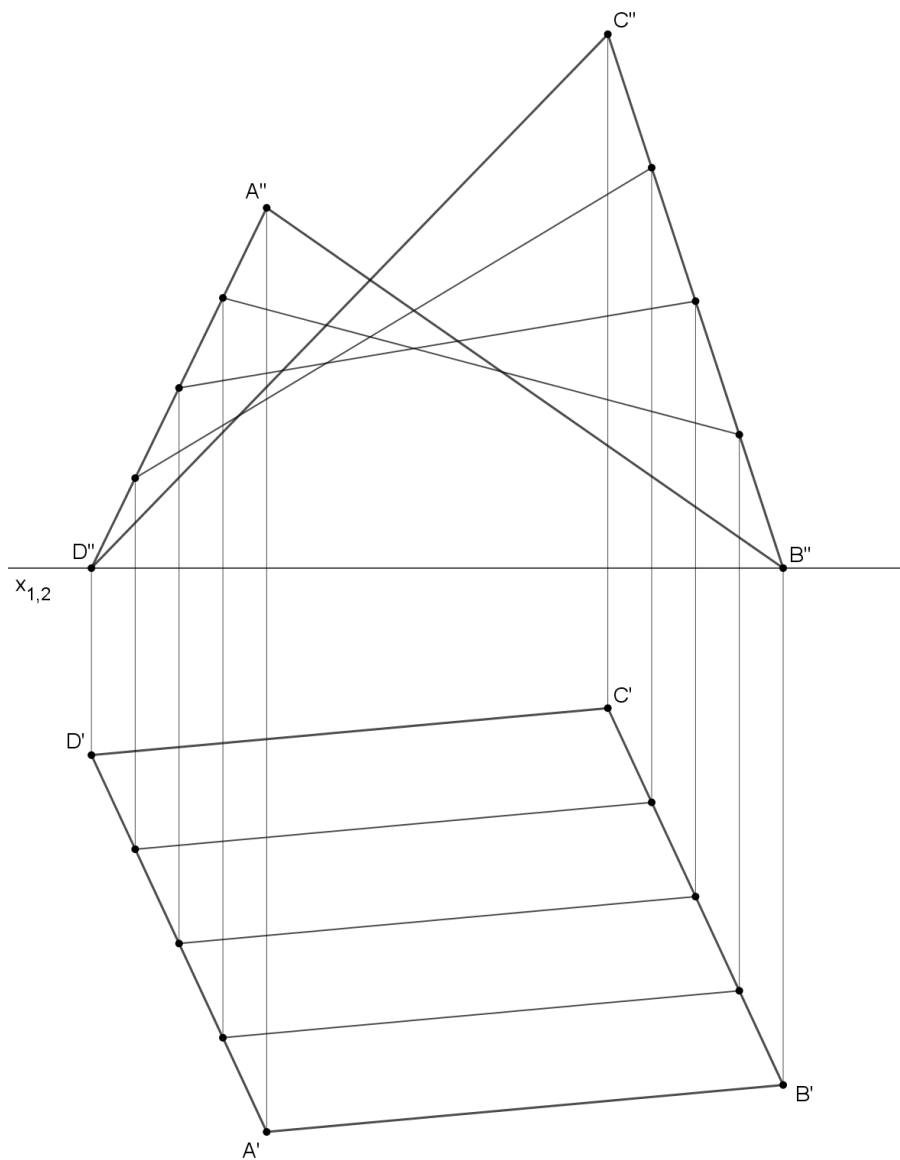
Adott egy, az első képsíkra merőleges tengelyű nyeregfelület ABCD torznégyszögével. Szerkesszük meg az egyik alkotóseregének legalább három alkotóját, majd egy tetszőleges pontjában a pontbeli érintősíkot is!



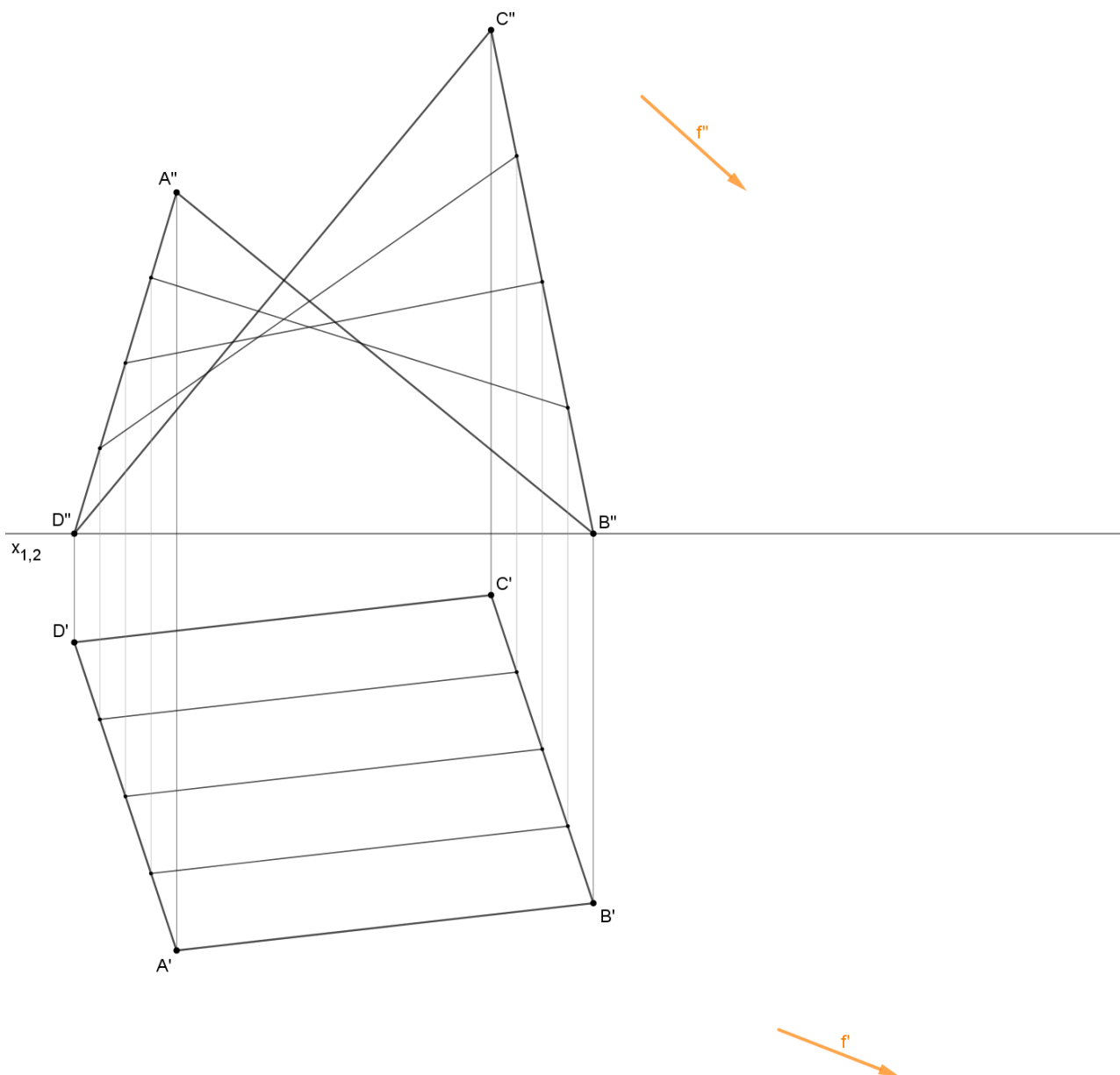
Adott egy, az első képsíkra merőleges tengelyű nyeregfelület $ABCD$ torznégyszögével. Szerkesszük meg a felület tengelyét, nyeregpontját, továbbá a főmetszeteket!



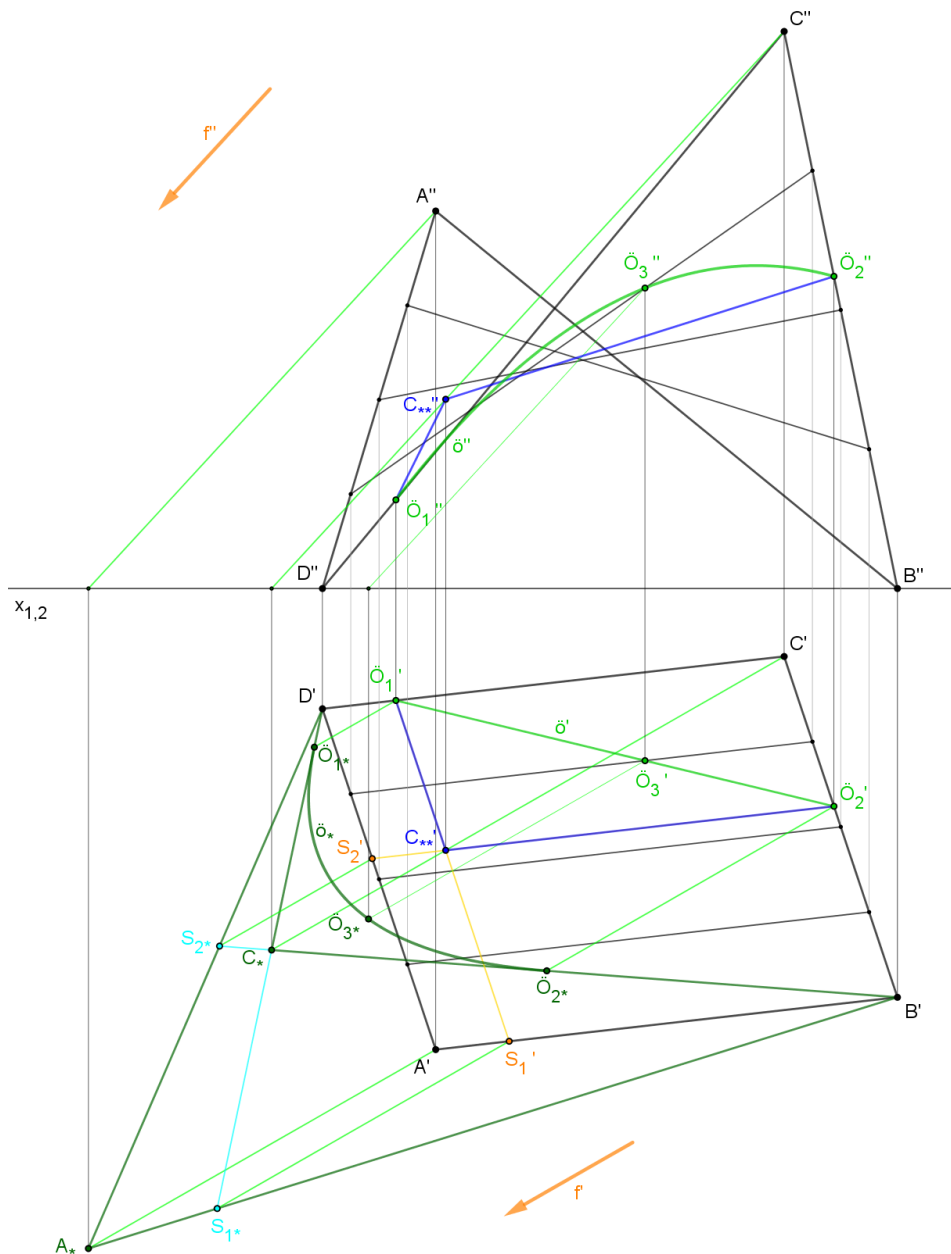
Adott egy, az első képsíkra merőleges tengelyű nyeregfelület ABCD torznégyszögével és egy sereghez tartozó néhány alkotójával. Szerkesszük meg a felület második kontúrgörbáját legalább öt ponttal!



Adott egy, az első képsíkra merőleges tengelyű nyeregfelület ABCD torznégyszögeivel és egy sereghez tartozó néhány alkotójával, továbbá egy fénysugárirány. Szerkesszük meg a felület önárnyékát és az első képsíkra vetett árnyékát!



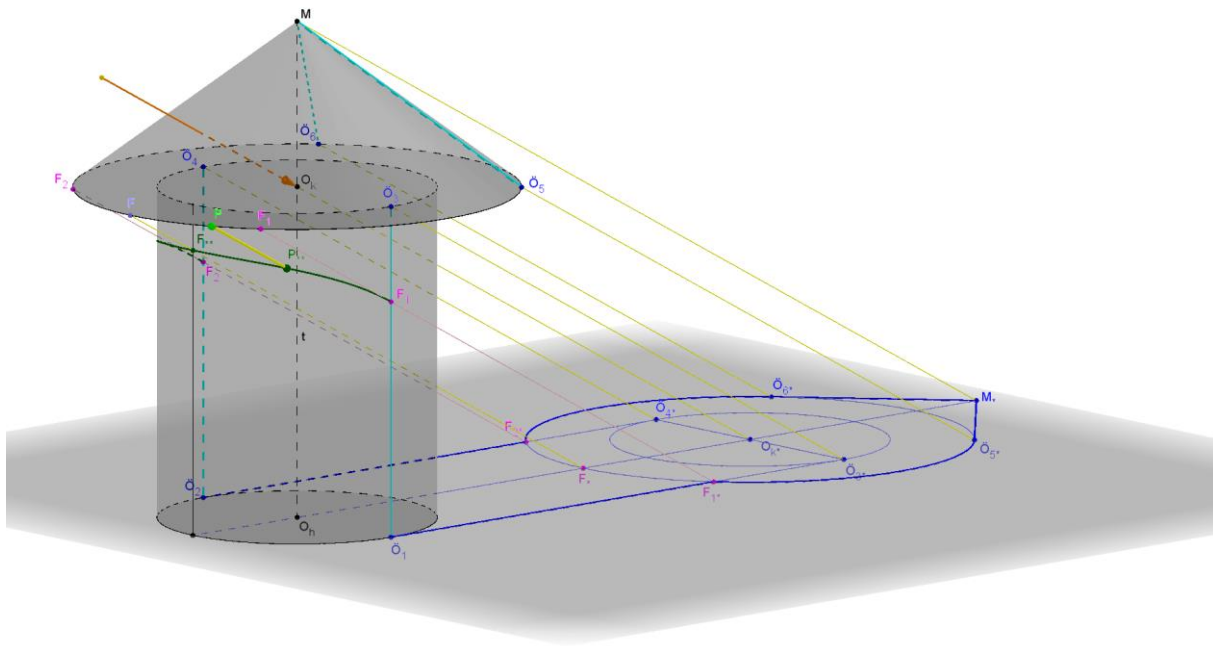
Szorgalmi: Adott egy, az első képsíkra merőleges tengelyű nyeregfelület ABCD torznégyszögeivel és egy sereghez tartozó néhány alkotójával, továbbá egy fénysugárirány. Szerkesszük meg a felület önárnyékát, az első képsíkra és önmagára vetett árnyékát!



12. Áthatások 2.

Rávetett árnyék mint áthatási görbe

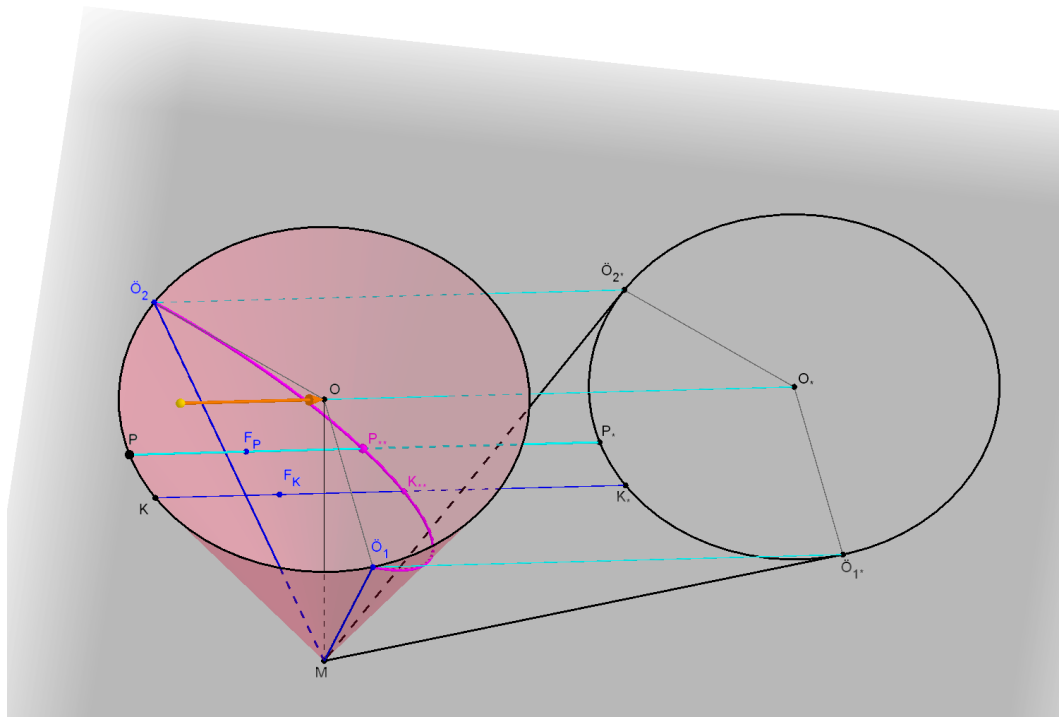
A példát tekintve a kúp alapkörén lévő F_1F_2 körív árnyékot vet a henger palástjára.
 → Az eredmény a fényhenger és az adott henger áthatási görbéjének egy darabja.



A széteső áthatás egy fontos alkalmazása: bevetett árnyék

Tekintsünk egy csúcsán álló kúppalástot, és tegyük fel, hogy adott fénysugárirány mellett a vetett árnyékát és az önárnyékhatár-alkotóit ismerjük.

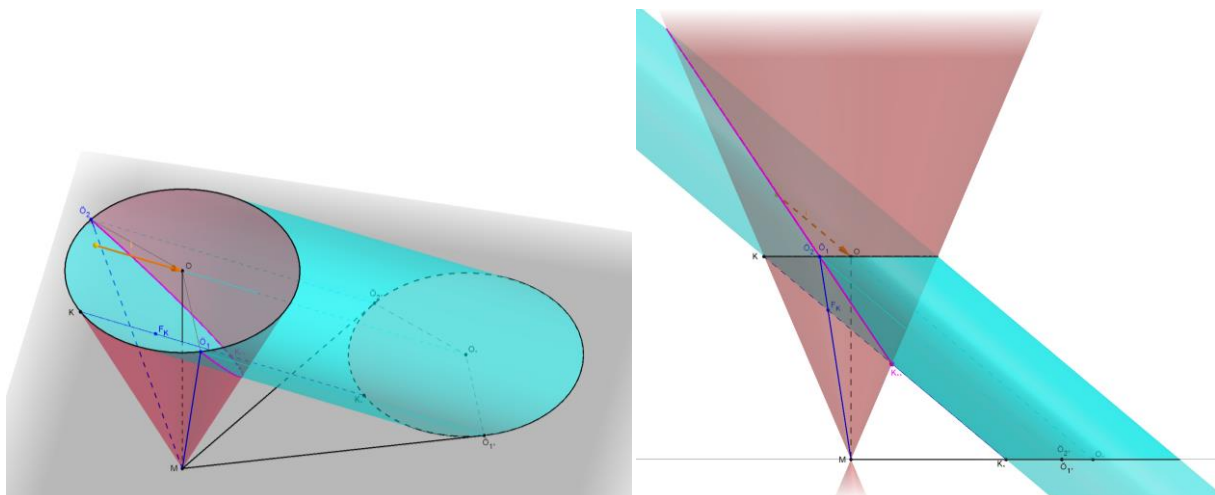
Az ábrán látható $\ddot{O}_1K\ddot{O}_2$ körív vetett árnyéka nem a talajra, hanem a kúp palástjának belső részébe kerül. Mivel a kúp alapkörét egy fényhenger vetíti, ezért a kapott görbe a fényhenger és a kúp áthatási görbéjének része.



A fényhenger és a kúp alapköre közös, ezért az áthatási görbének része. A fényhenger és a kúp érintősíkja az $\ddot{O}_1$, illetve az $\ddot{O}_2$ pontokban közös ($M\ddot{O}_1\ddot{O}_1^*$ és $M\ddot{O}_2\ddot{O}_2^*$ síkok), ezért ezek az áthatási görbének duplapontjai. → Az áthatás széteső áthatás, amelynek egyik része a közös kör, a másik része a bevetett árnyék.

Az áthatási görbe (mint másodrendű felületek áthatási görbéje) negyedrendű, ezért a bevetett árnyék egy másodrendű görbe („ $2+2=4$ ”).

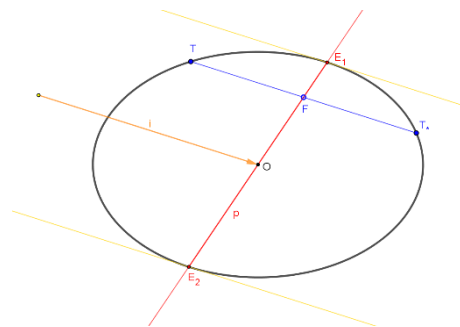
Az áthatási görbe mindkét felületre illeszkedik; a fényhenger miatt a bevetett árnyék csak ellipszis lehet. → Nagytengelyének egyik végpontja a bevetett árnyék ún. legmélyebb pontja.



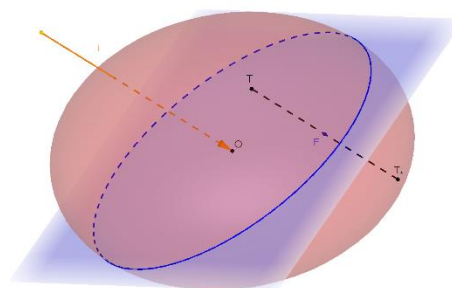
A síkmetszet, az önárnyék és a bevetett árnyék közötti kapcsolat

Előkészítés:

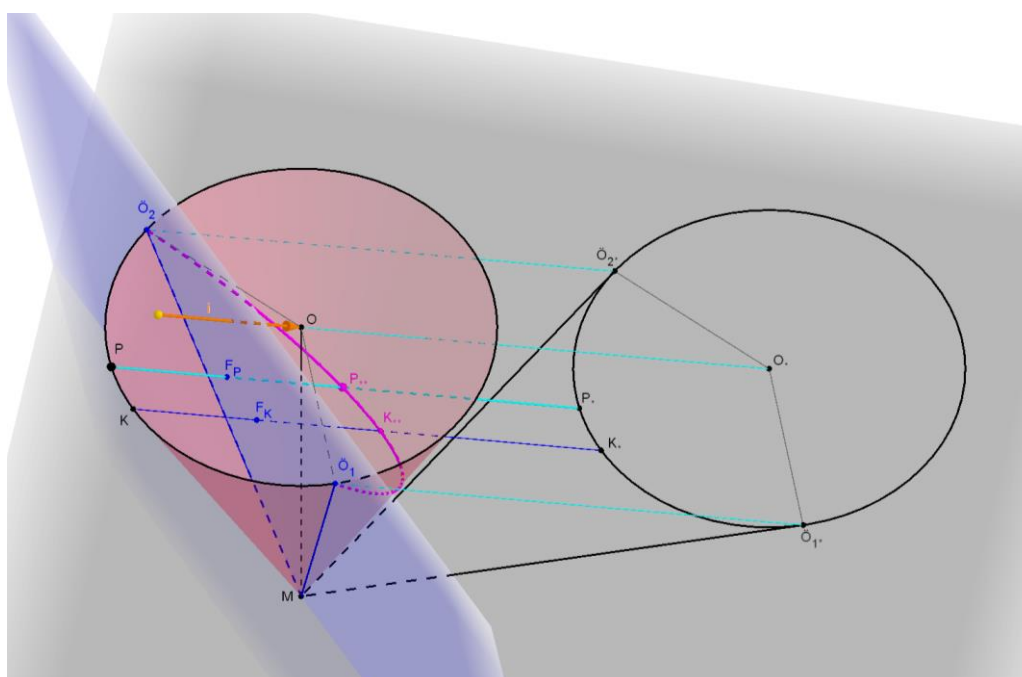
Egy végtelen távoli pont adott másodrendű görbére vonatkozó *poláris egyenese* a ponthoz tartozó iránnyal párhuzamos érintők érintési pontjai által meghatározott egyenes. A poláris egyenes egyik fontos tulajdonsága, hogy a másodrendű görbe adott iránnyal párhuzamos szelőit felezi.



Térben, egy végtelen távoli pont adott másodrendű felületre vonatkozó polársíkja (ld. a 2. előadást) a felület összes olyan szelőjét felezi, amelyeknek végtelen távoli pontja az adott pont.

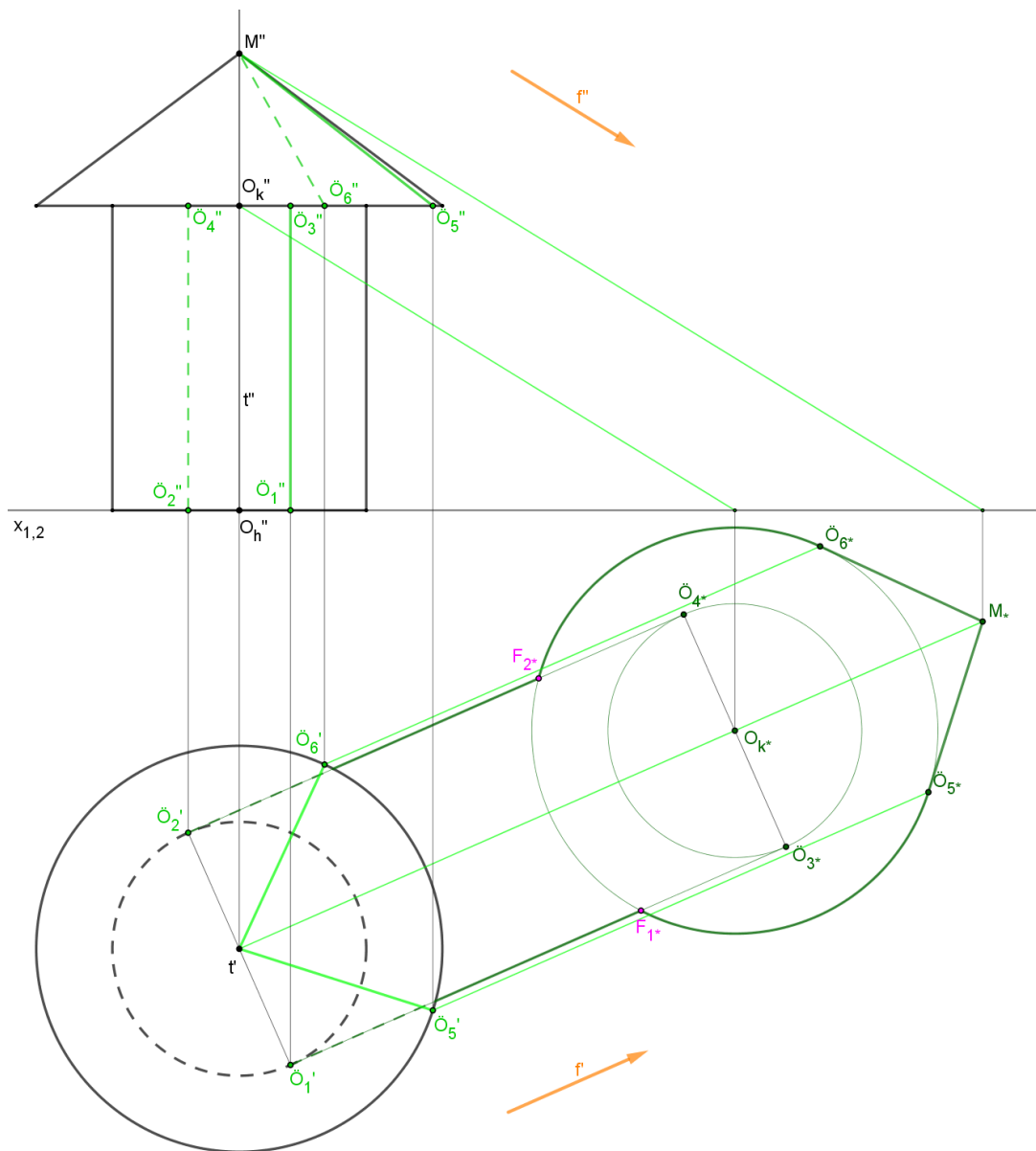


Legyen most az adott végtelen távoli pont egy fénysugárirány. Ismert, hogy a ponthoz tartozó polársík az önárnyékhatár síkja. Tekintsük a korábbi példánkat. Az adott iránnyal párhuzamos szelők éppen a fénysugarak, végpontjaik a köríven, illetve a bevetett árnyékon vannak. → A pontot és a bevetett árnyékát összekötő szakasz felezőpontja az önárnyékhatár síkjában van.

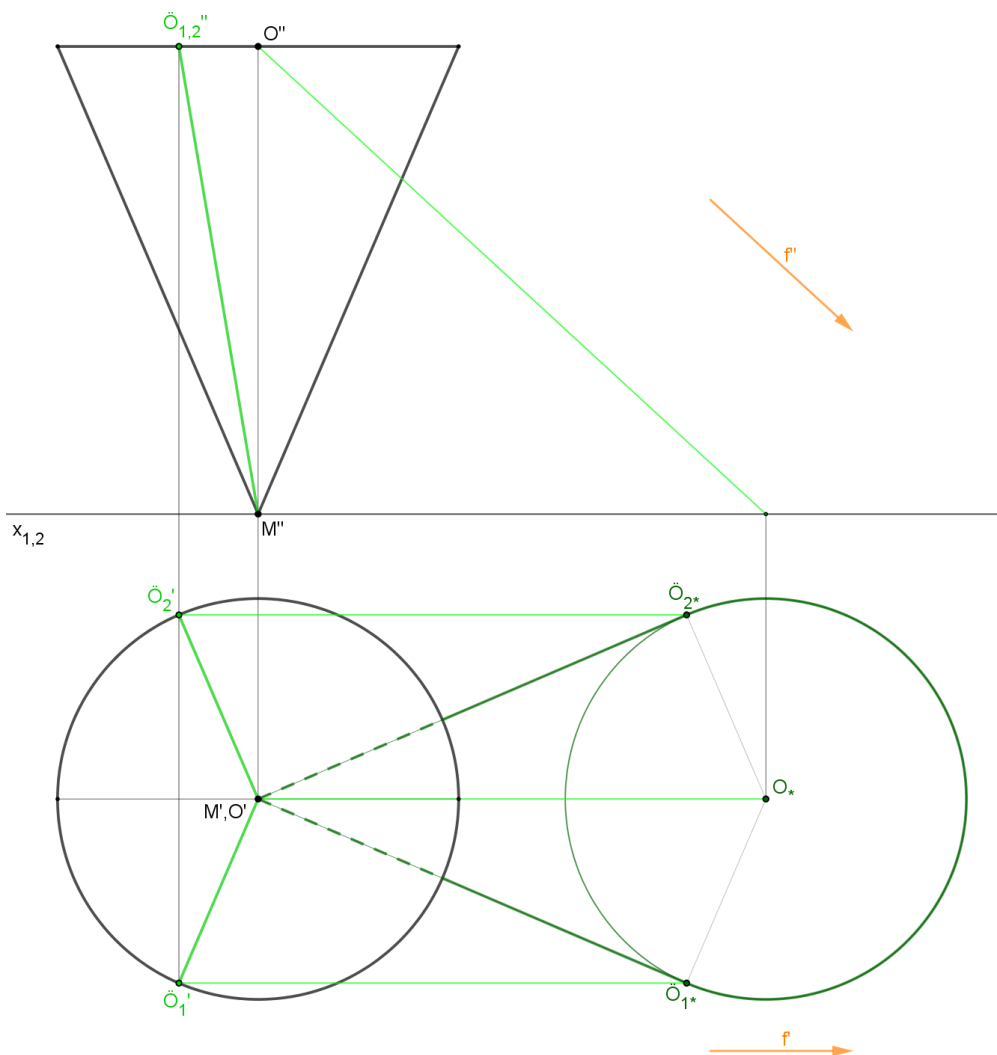


Alapvető szerkesztés(ek)

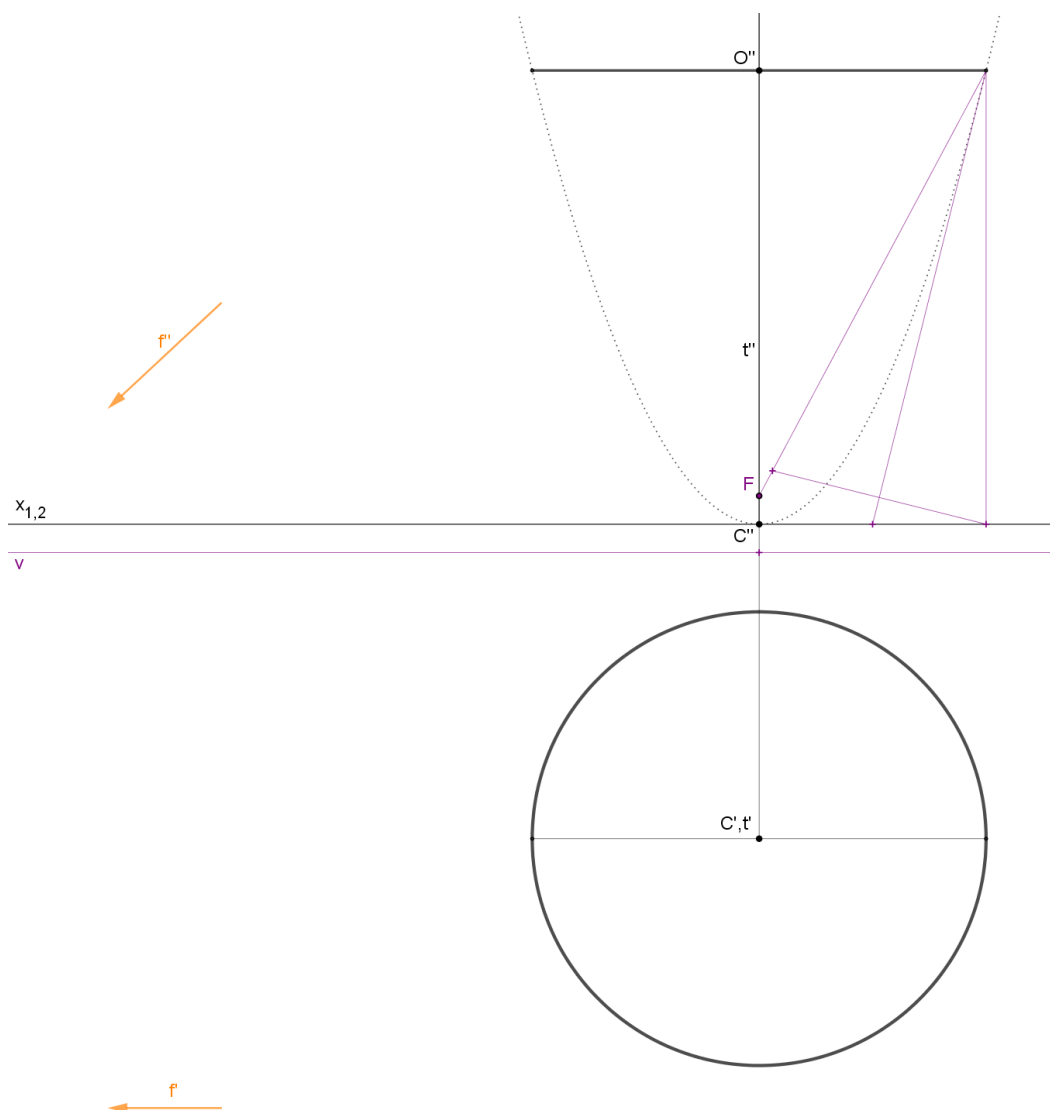
Adott az ábrán látható sematizált torony és egy fénysugárirány Monge-projekcióban. Szerkesszük meg az összes árnyékot! (A korábban már tanult árnyékokat – talajra vetett árnyékok és önárnyékok – gyakorlásképpen meg lehet szerkeszteni, itt azokat már ismertnek tekintjük.)



Adott egy csúcán álló kúp palástja Monge-projekcióban. A kúp tengelye első vetítőegyes. Adott továbbá egy második képsíkkal párhuzamos fénysugárirány. Szerkesszük meg a kúp összes árnyékát!



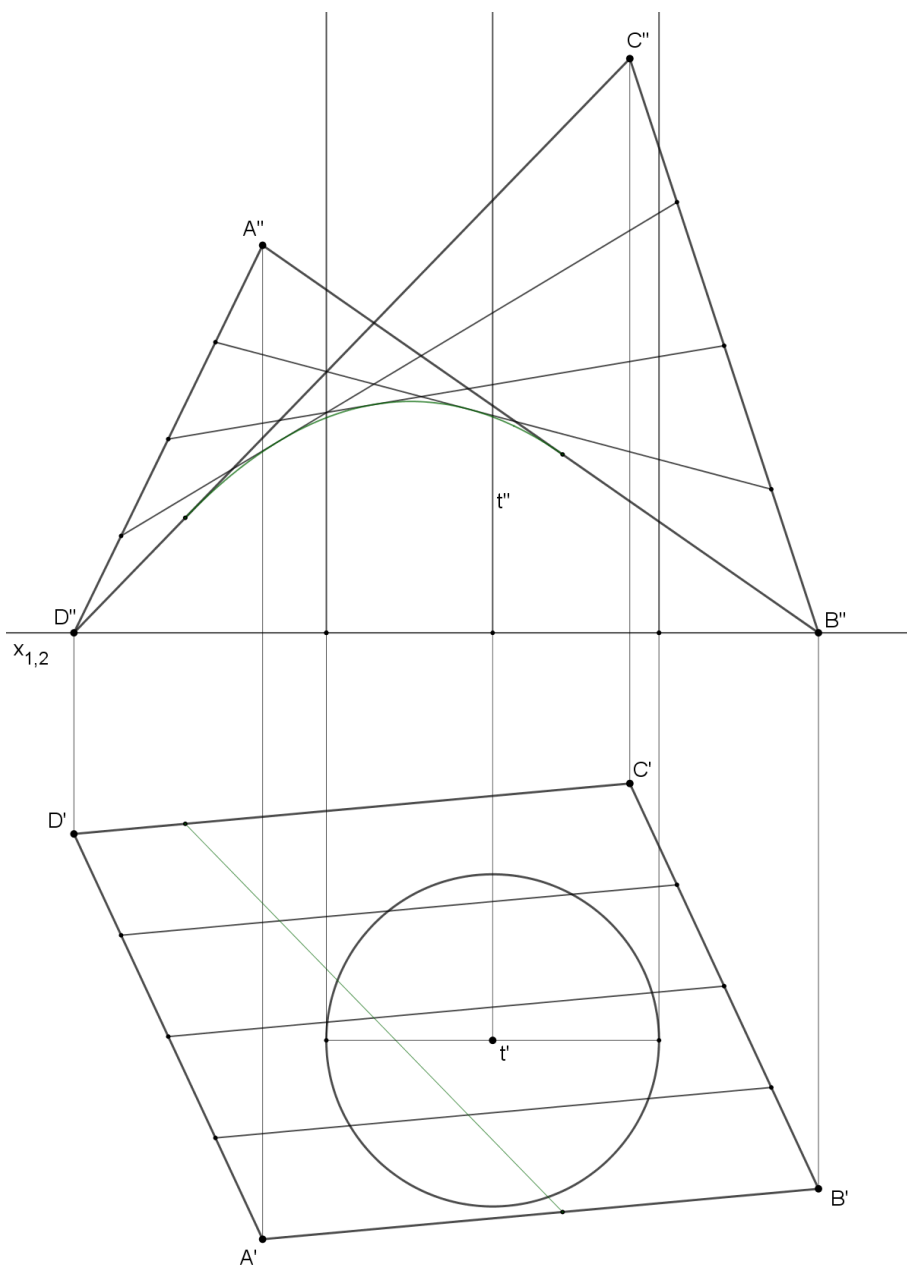
Adott egy felfelé nyíló forgáspároloid Monge-projekcióban úgy, hogy a tengelye első vetítőegyenest, valamint egy fénysugárirány. Szerkesszük meg a paraboloid összes árnyékát!



Egy további példa az áthatásokra

Ha az egyik felület alkotókból áll, az adott felület alkotóival is elmetszhetjük a másik felületet.

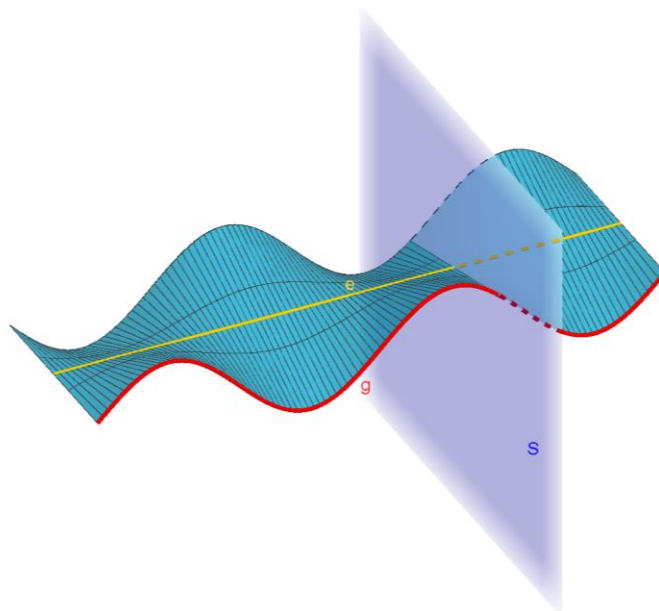
Típusfeladat: Adott egy nyeregfelület torznégyszögével és egy henger Monge-projekcióban az ábrán látható módon. Szerkesszük meg az áthatási görbe néhány pontját!



13. Konoid

Általános előállítás

Tekintsünk egy görbét (g vezérgörbe), egyenest (e vezéregyenes) és egy síkot (S irány sík). A konoid egy olyan torzfelület, amelynek alkotói a görbe és az egyenes adott síkkal párhuzamos transzverzálisai.

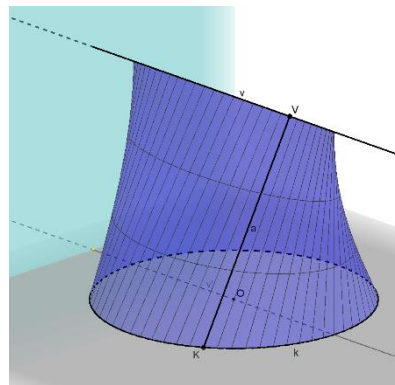


- Egy konoid körkonoid, ha a vezérgörbéje kör.
- Egy konoid parabolakonoid, ha a vezérgörbéje egy parabola.
- Egy konoid egyenes konoid, ha a vezéregyenes merőleges az irány síkra.

Érdekesség: A definíció alapján a nyeregfelület konoid – két, azonos seregbeli alkotója a két vezéregyenes/-görbéje, irány síkja egy, a másik sereggel párhuzamos sík.

Egyenes körkonoid származtatása

Szintetikusán: Tekintsünk egy kört és az egyik átmérőjének egyenesét toljuk el a kör középpontján áthaladó, a kör síkjára merőleges egyenesen. Vegyünk fel egy síkot, amely erre az egyenesre merőleges. Ekkor a kör mint vezérgörbe, az eltolt egyenes mint vezéregyenes és a merőleges sík mint irány sík által meghatározott felület egy egyenes körkonoid.



Analitikusan (a vezérkör és a vezéregyenes közötti rész leírása, ha a kör sugara r , a vezéregyenes és a vezérkör távolsága m):

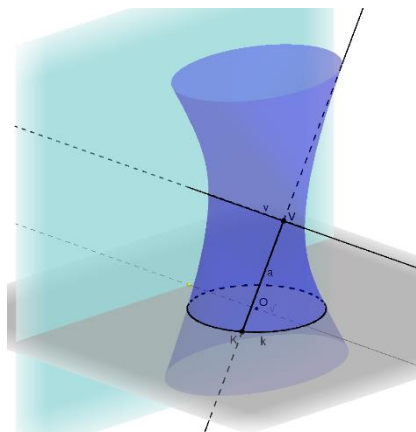
paraméteresen:

$$F(u, v) = (r \cdot \cos u, r \cdot (1 - v) \cdot \sin u, m \cdot v),$$

$$u \in [0, 2\pi], v \in [0, 1]$$

implicit egyenlettel:

$$(x^2 - r^2) \cdot (z - m)^2 + m^2 y^2 = 0$$



Elhelyezés a felületek rendszerében:

- negyedrendű algebrai felület
- torzfelület

Alapvető kapcsolódó térelemek

vezérgörbe:

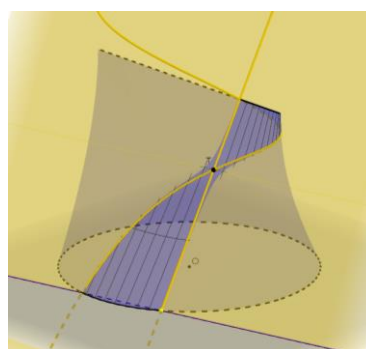
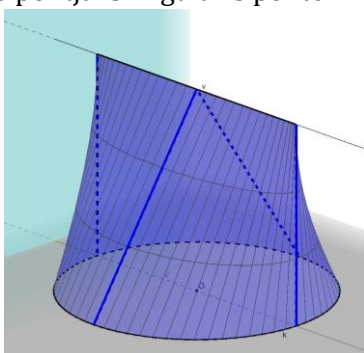
vezéregyenes:

iránysík:

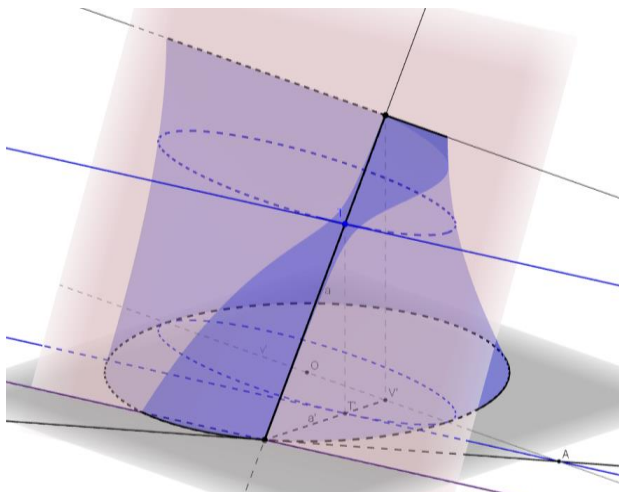
szimmetriasíkok:

Felületi pontok, pontbeli érintősík

- A két függőleges alkotó, valamint az O-n áthaladó, irány síkkal párhuzamos síkban lévő két alkotó pontjai parabolikus pontok, minden más pont hiperbolikus. A felület vezéregyenesre eső pontjai szinguláris pontok.

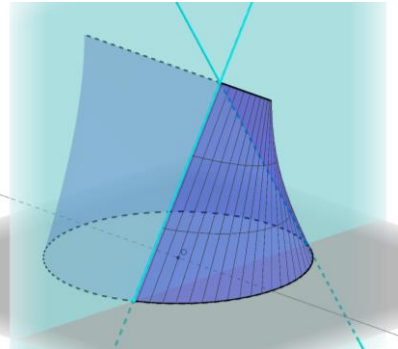
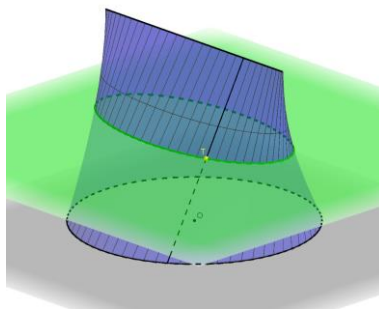
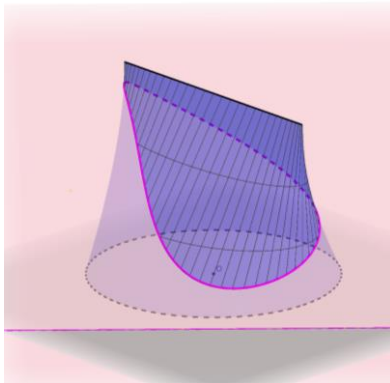


- Pontbeli érintősík előállítása: ponton áthaladó alkotóval és egy „vízszintes” egyenessel. A pontbeli vízszintes metszet ellipszis, ugyanis a vetületen az alkotók képét a metszet képének pontja mindig ugyanolyan arányban osztja.
vízszintes egyenes = ellipszisérintő → vetülete affinitással megkapható



Lehetséges speciális síkmetszetek

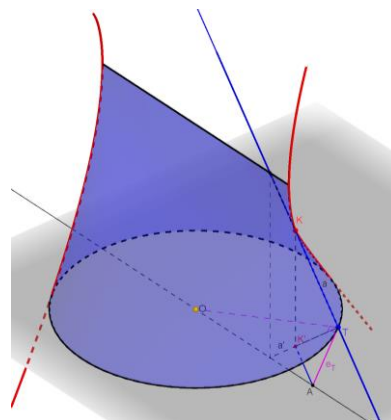
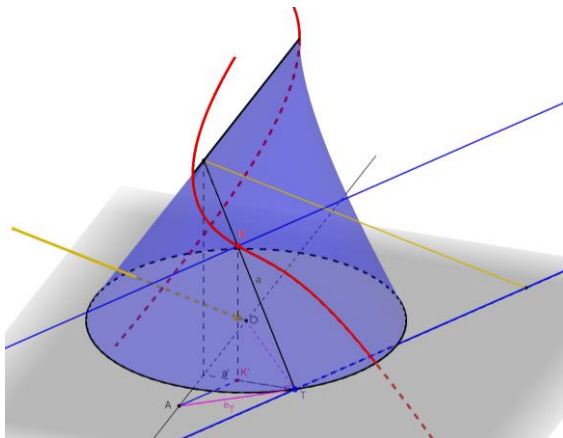
- Ellipszis: ld. korábban
- Alkotópár:



Kontúrgörbe, önárnyékhatár-görbe

Mindkét görbe térgörbe, amely pontonként szerkeszthető.

Minden alkotó esetén külön keressük a kontúrpontot. → A keresett K kontúrpontban az érintősík vetítősík. → A „vízszintes” ellipszisérintő képe és vetülete párhuzamos az alkotó képével.



A gyakorlatban a képkontúr az alkotók képének ún. *burkológörbéje*: olyan görbe, amely minden alkotó(egyenes) képét érinti.

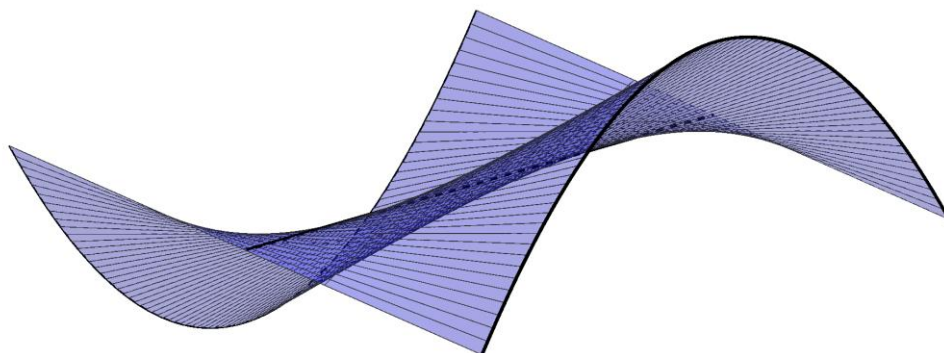
Az egyenes parabolakonoidról röviden

Olyan harmadrendű felület, amelynek egy lehetséges paraméteres, illetve implicit előállítása:

$$F(u, v) = \left(m - 2 \cdot m \cdot v, u, p \cdot \left(1 - \left(\frac{u}{d} \right)^2 \right) \cdot (1 - 2 \cdot v) \right) \quad u \in [-d, d], v \in [0, 1]$$

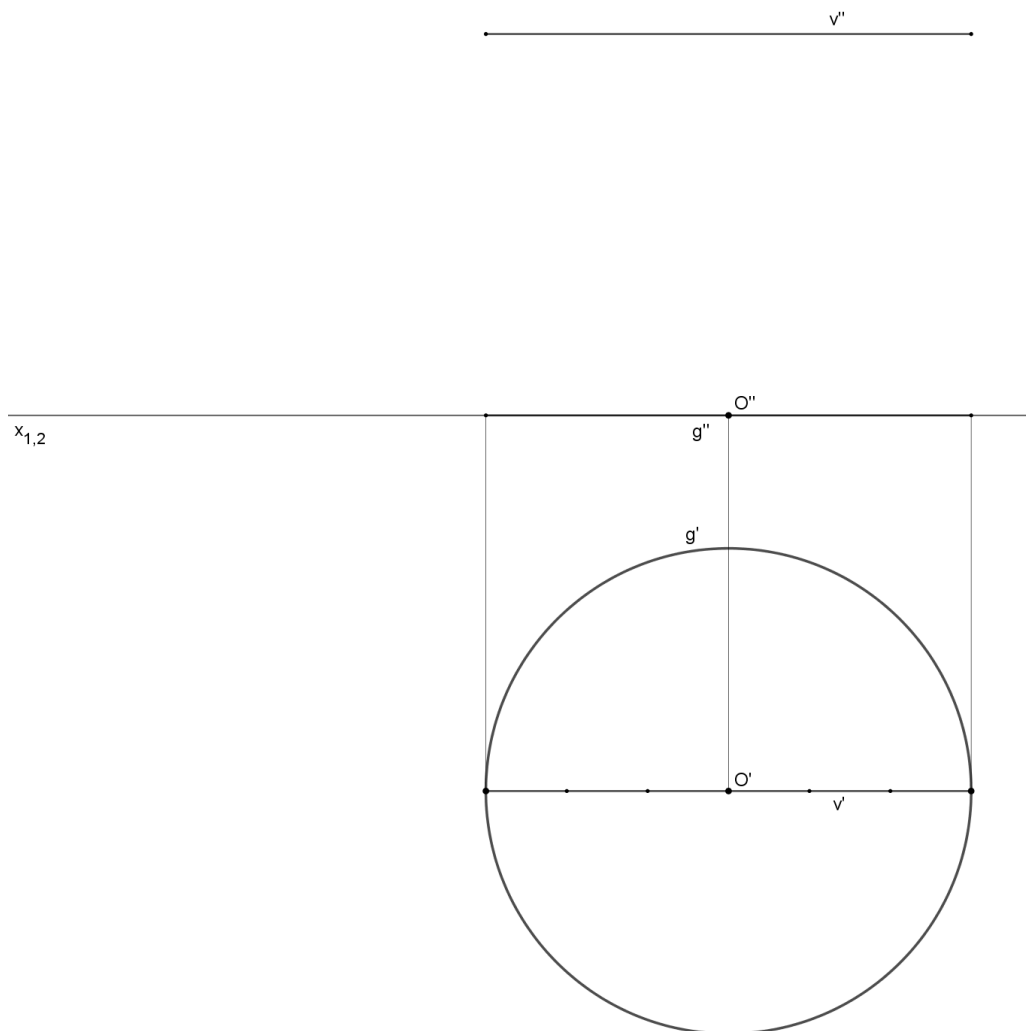
$$z = p \cdot \frac{x}{m} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{d} \right)^2 \right)$$

(p a parabolaív magassága, d a szélessége, m a parabola síkjának és a vezéregyenesnek a távolsága)

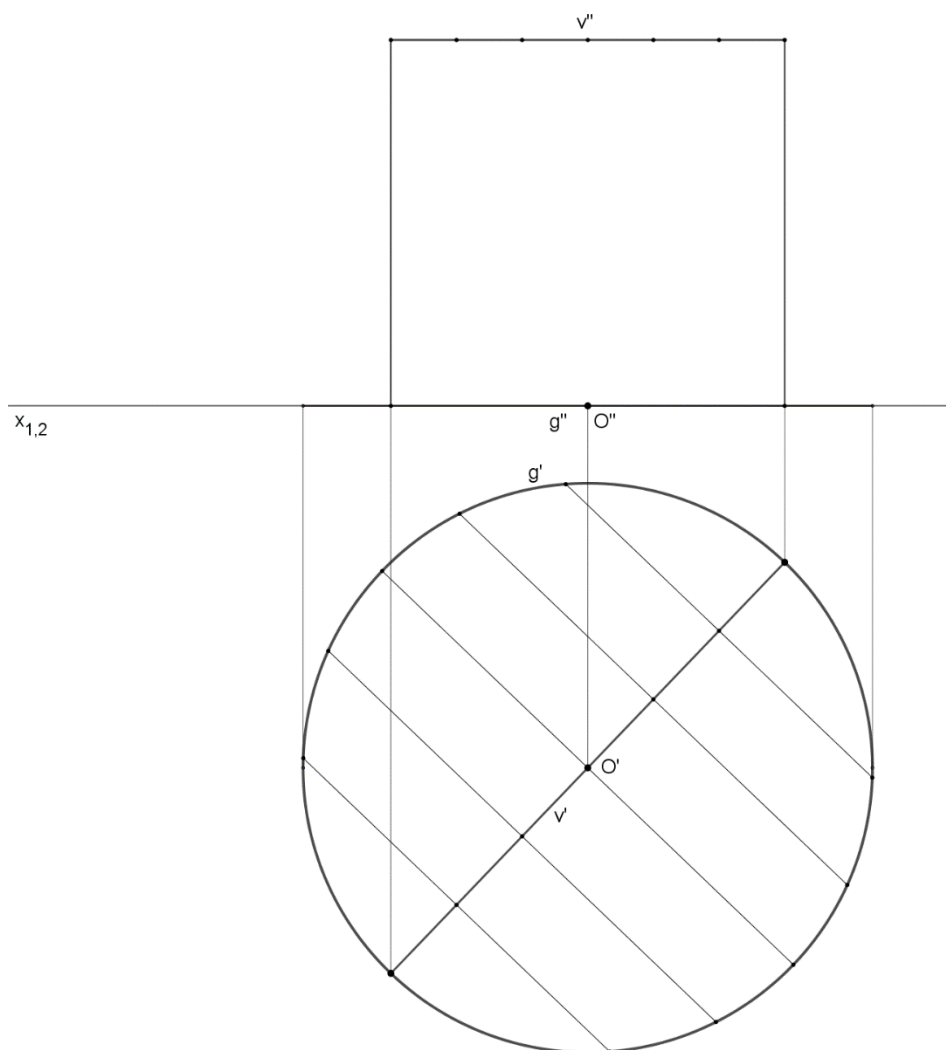


Alapvető szerkesztések

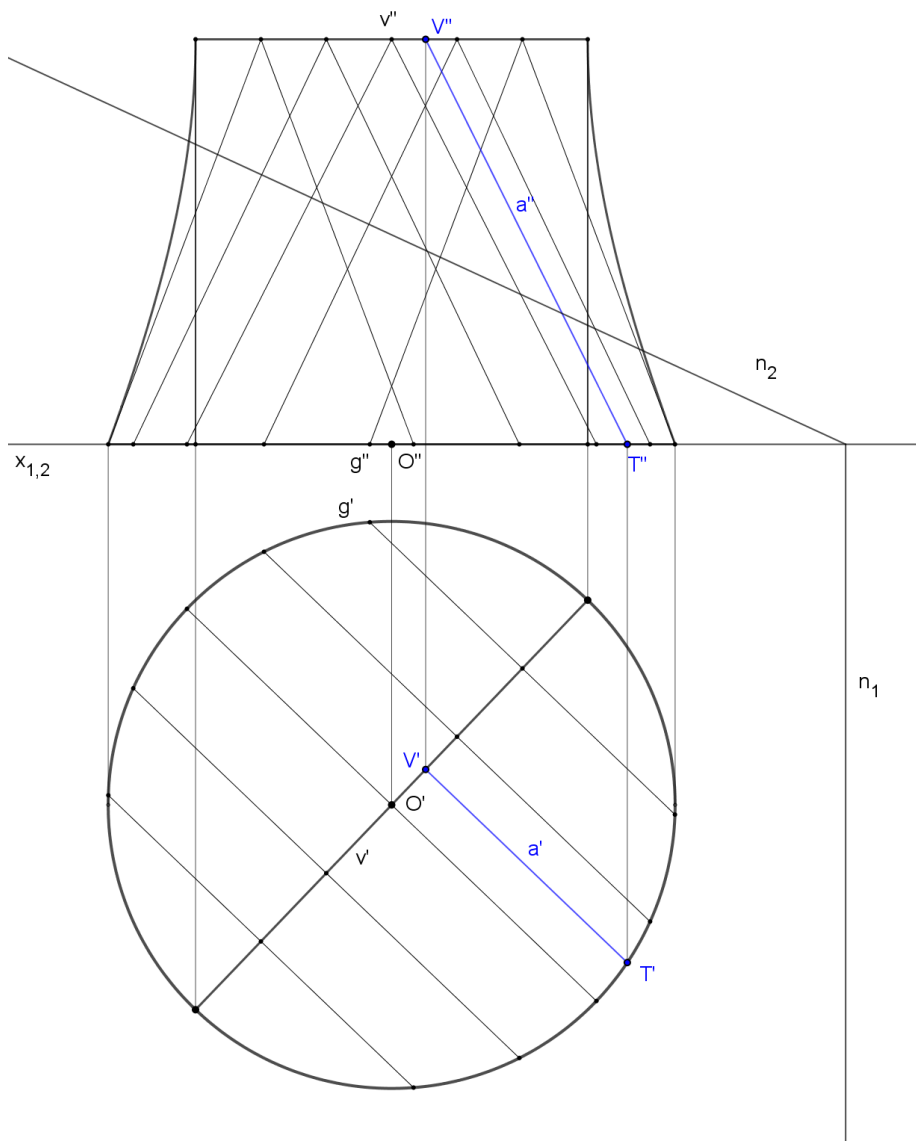
Adott egy, az első képsíkon álló egyenes körkonoid vezérkörével és vezéregyenesével Monge-projekcióban. Szerkesszük meg min. 10 alkotóját, majd egy tetszőleges alkotó egy tetszőleges pontjában a pontbeli érintősíkot is!



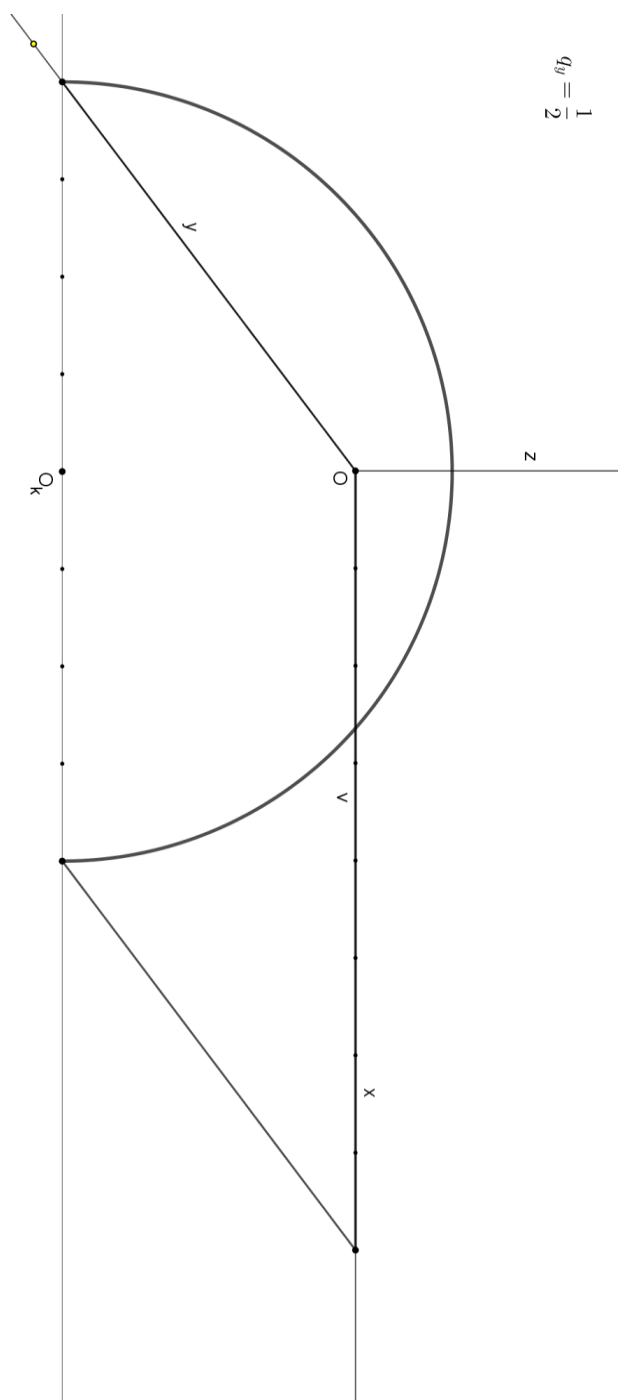
Adott egy, az első képsíkon álló egyenes körkonoid vezérkörével, vezéregyenesével, továbbá ismert néhány alkotójának első képe is Monge-projekcióban. Szerkesszük meg a konoid második kontúrgörbét!



Adott egy, az első képsíkon álló egyenes körkonoid vezérkörével, vezéregyenesével, továbbá ismert néhány alkotójának mindkét képe is Monge-projekcióban. Adott továbbá egy második vetítősík. Szerkesszük meg a konoid síkmetszetét!



Adott egy fekvő helyzetű fél egyenes körkonoid vezérköre, vezéregyenese frontális axonometriában. Szerkesszük meg legalább egy alkotójának kontúrpontját!



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

14. Csavarvonal és csavarfelület

Csavarvonal előállítása és alapvető fogalmak

Tekintsünk egy egyenes körhengert és annak egy alkotójának egy tetszőleges pontját. Forgassuk el a pontot a hengeren óramutató járásával ellentétes (vagy azzal egyező) irányban az alapkör síkjával párhuzamosan egyenletes sebességgel, miközben pontot a tengellyel párhuzamosan egyik irányban – szintén egyenletes sebességgel – mozgatjuk. A pont a forgatás és mozgás során egy *hengeres csavarvonalat* ír le.

Az adott henger a csavarvonal *csavarhengere*, a henger tengelye a csavarvonalnak is tengelye. A csavarvonal egy *menete* egy 360 fokos forgatáshoz tartozó íve, egy menetének kezdő- és végpontjának magasságkülönbsége a csavarvonal *menetmagassága*. A csavarvonal *menethossza* az egy menetéhez tartozó ív valódi hossza.

A csavarvonal *jobbra csavarodó*, ha a forgatás az óramutató járásával ellentétes, a másik esetben pedig *balra csavarodó*.

A menethosszból és menetmagasságból kifejezhető a csavarvonal ún. emelkedési szöge: β .

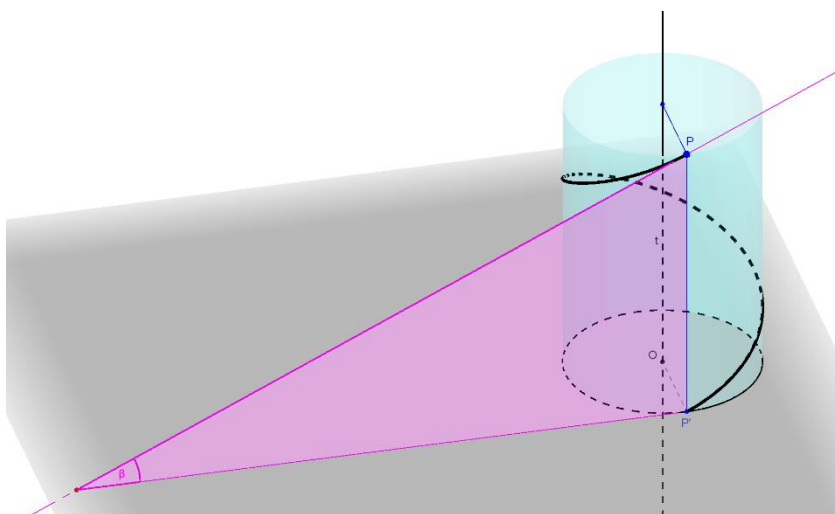
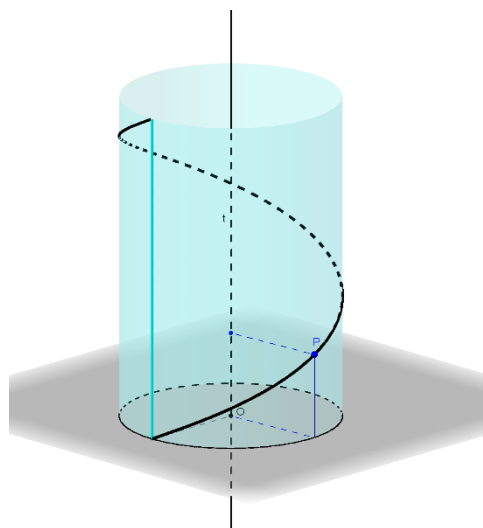
Ha a csavarvonal menetmagassága m , akkor a $p = \frac{m}{2\pi}$ érték a csavarvonal *paramétere*, és teljesül a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p}{r}$$

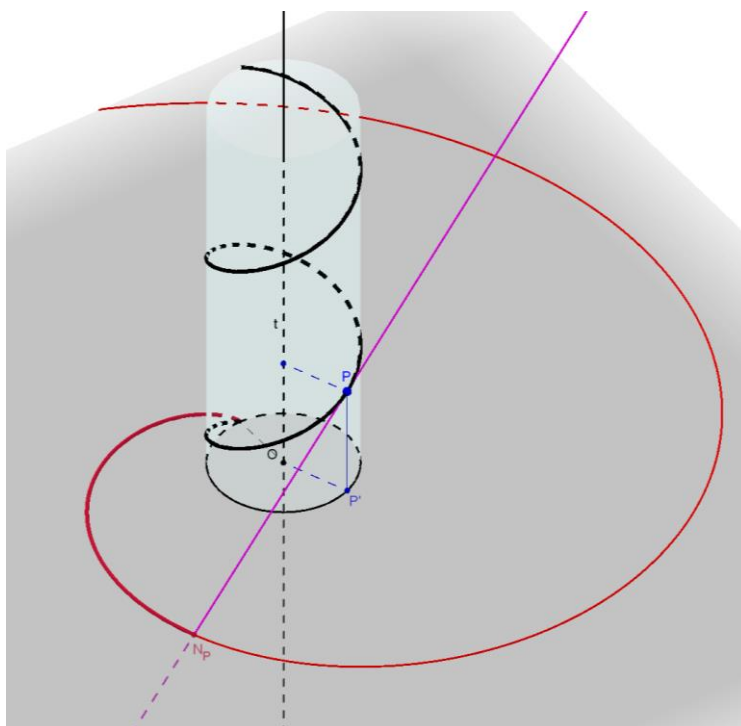
összefüggés.

Szemléletes előállítás:

Mivel a henger palástja kifejthető, ezért...

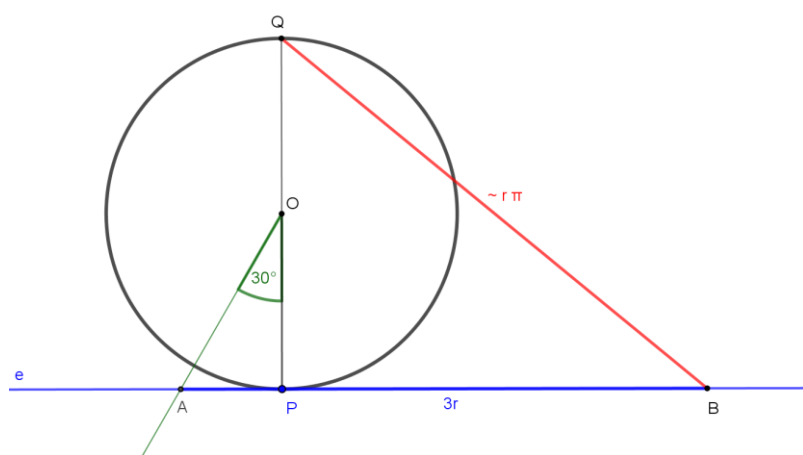


Érdekesség: Egy hengeres csavarvonal összes érintőegyenesének összes nyompontja egy ún. csúcsos körevolvenst ad.



Kiegészítés

Kochanski-szerkesztés a félkerület közelítő meghatározására



Laposmenetű zárt torzcsavarfelület származtatása („csigalépcső”)

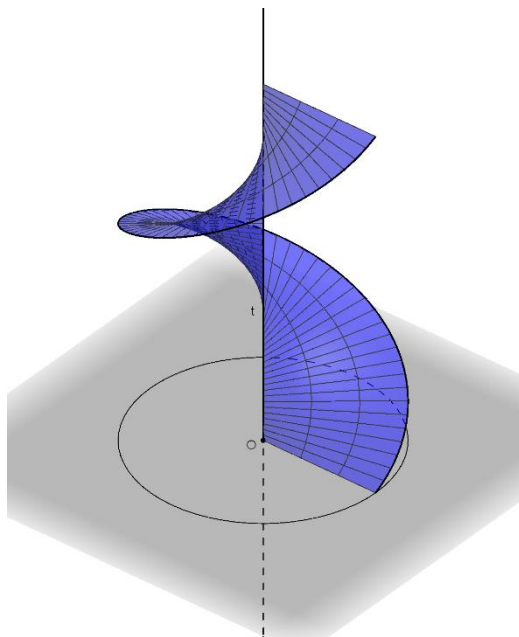
(Az elnevezést indoklását lásd a következő előadáson.)

Szintetikusán: Ha egy hengeres csavarvonal pontjait összekötjük a ponttal azonos magasságban lévő tengelyponttal, az így kapott szakaszok (vagy egyenesek) összessége laposmenetű zárt torzcsavarfelületet ad.

Analitikusan (z tengelyű, r sugarú, p paraméterű csavarfelület):

$$F(u, v) = (r \cdot v \cdot \cos u, r \cdot v \cdot \sin u, p \cdot u)$$

$u \in [0, 2\pi], v \in [0, 1]$



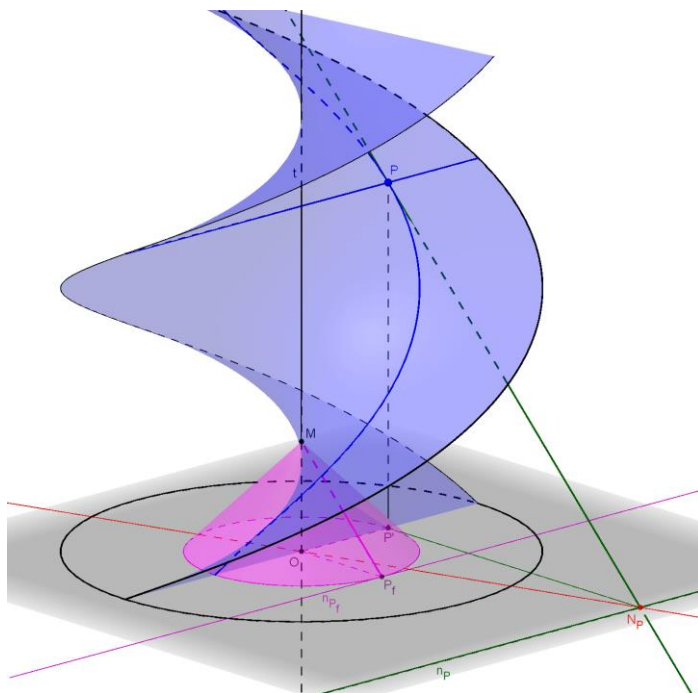
Elhelyezés a felületek rendszerében:

- torzfelület
- csavarfelület
- transzlációs felület*
- *érdekesség:* konoid

A laposmenetű torzcsavarfelület alapvető kapcsolódó fogalmai a határoló csavarvonalával megegyezők.

Felületi pontok, pontbeli érintősík

- Minden pontja hiperbolikus pont.
- Pontbeli érintősík előállítás:



Fontos! Egy iránykúp csúcspontja csak a csavarvonal menetmagasságától függ, ezért minden felületi csavarvonalhoz tartozó iránykúp csúcspontja ugyanaz.

Érdekesség: Egy alkotóhoz tartozó csavarvonal-érintők összessége nyeregfelületet alkot.

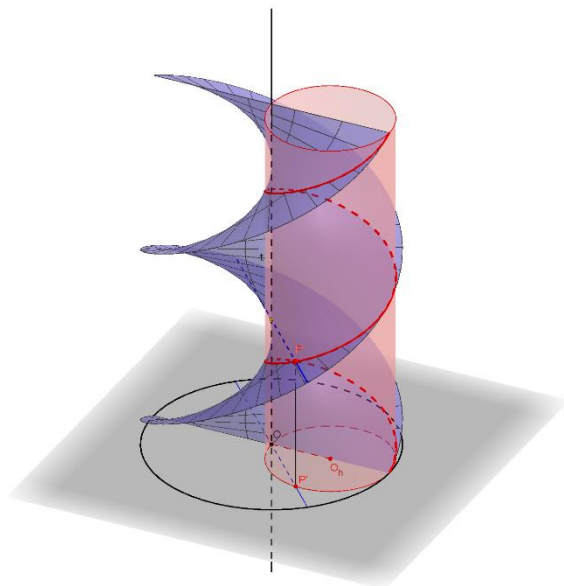
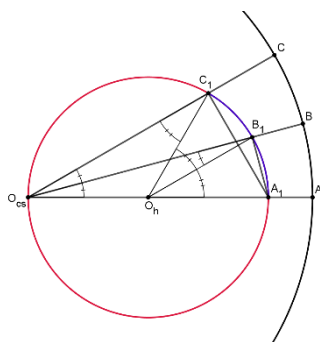
A laposmenetű torzcsavarfelület és speciális állású hengerek kapcsolata

Tekintsünk egy olyan hengert, amelynek egyik alkotója a csavarfelület tengelye.

Ekkor a két felület áthatási görbéje egy hengeres csavarvonal.

Érdeklődők beláthatják, hogy a hengerre írt görbe két, egymás után következő pontja közötti magasságkülönbség egyenlősége mellett a henger tengelye körüli forgás is egyenlő szögű. (E két tulajdonság miatt teljesül, hogy a kapott görbe valóban csavarvonal.) Sőt, a henger paramétere a csavarfelület paraméterének fele.

Segítségül szolgálhat az alábbi, felülnézeti ábra.

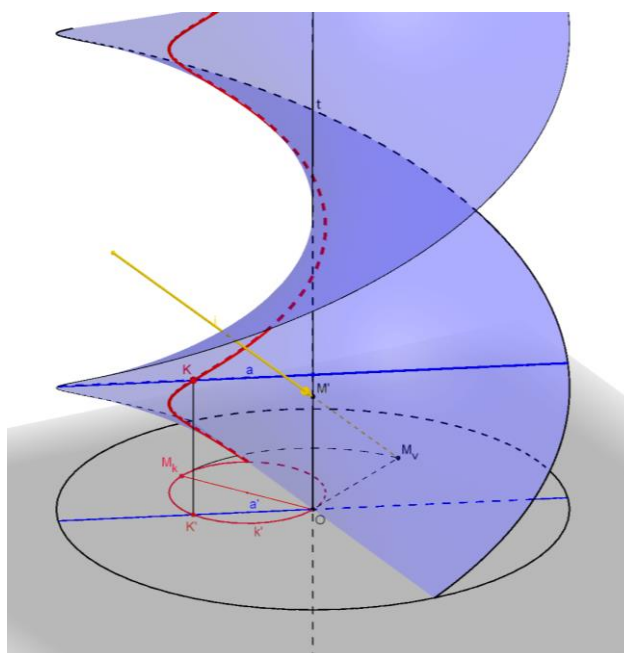


Kontúrgörbe axonometriában

Olyan hengeres csavarvonal, amelynek menetmagassága (és így a paramétere) egyenlő a csavarfelület menetmagasságának felével.

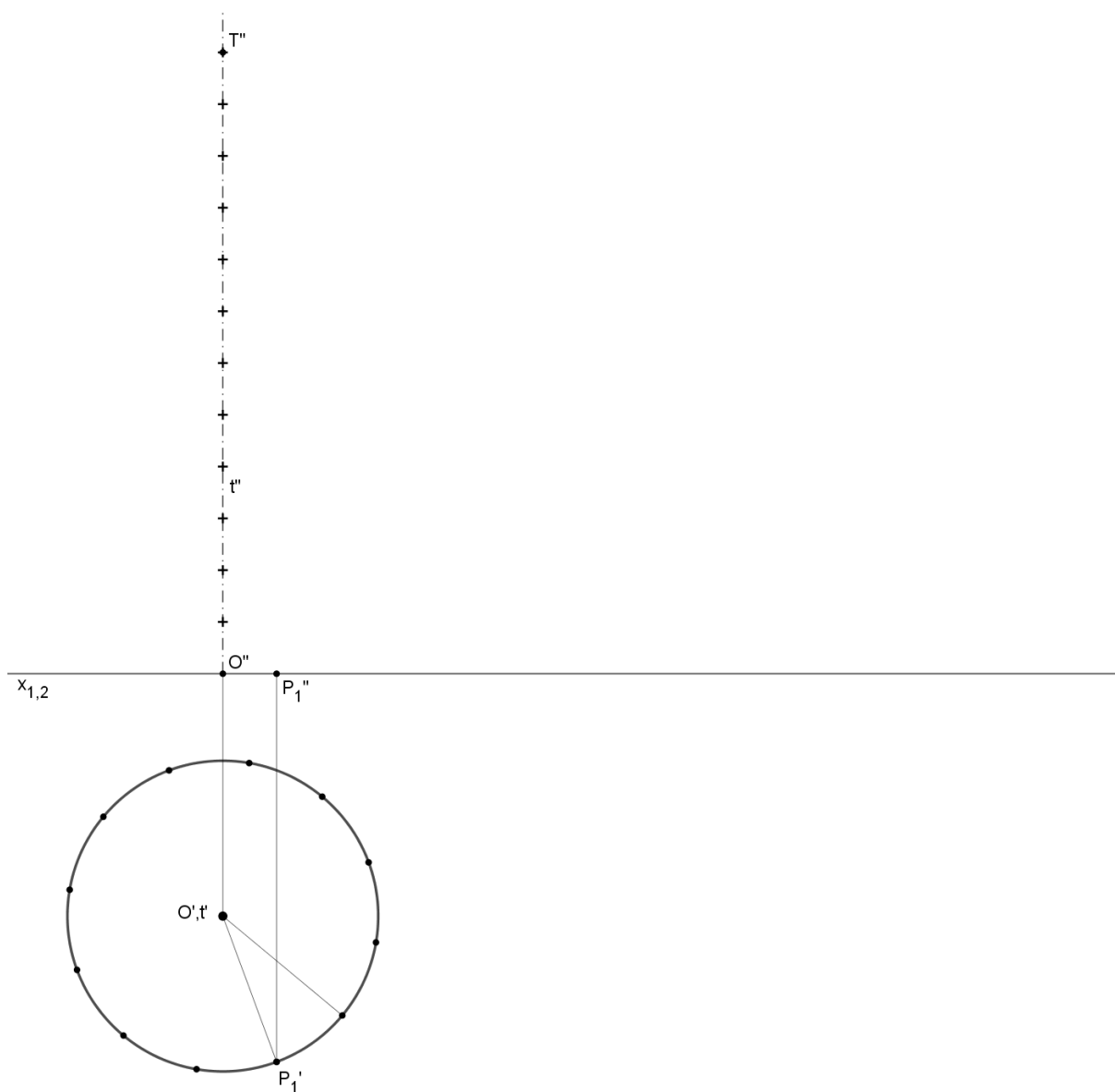
Algoritmus:

1. Szerkesszük meg az iránykúpok közös M csúcspontjának vetületét (M_v).
2. Forgassuk el 90 fokkal a csavarfelület csavarodási irányával megegyezően: M_k .
3. Írjunk Thalész-kört az OM_k szakaszra.
4. Az így kapott kör metszi az alkotók vetületeit, az egyes metszéspontok az alkotók kontúrpontjainak vetületei.

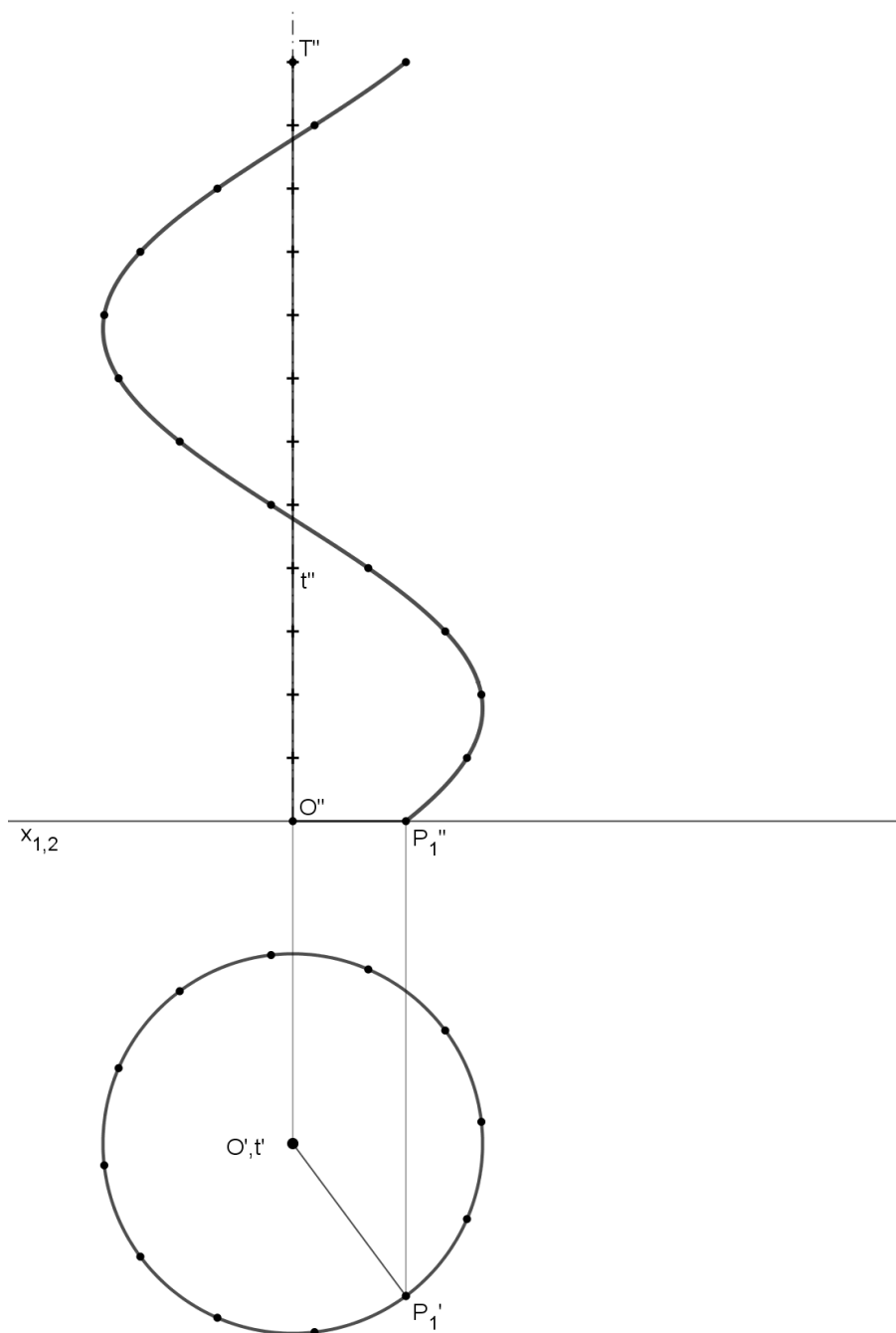


Alapvető szerkesztések

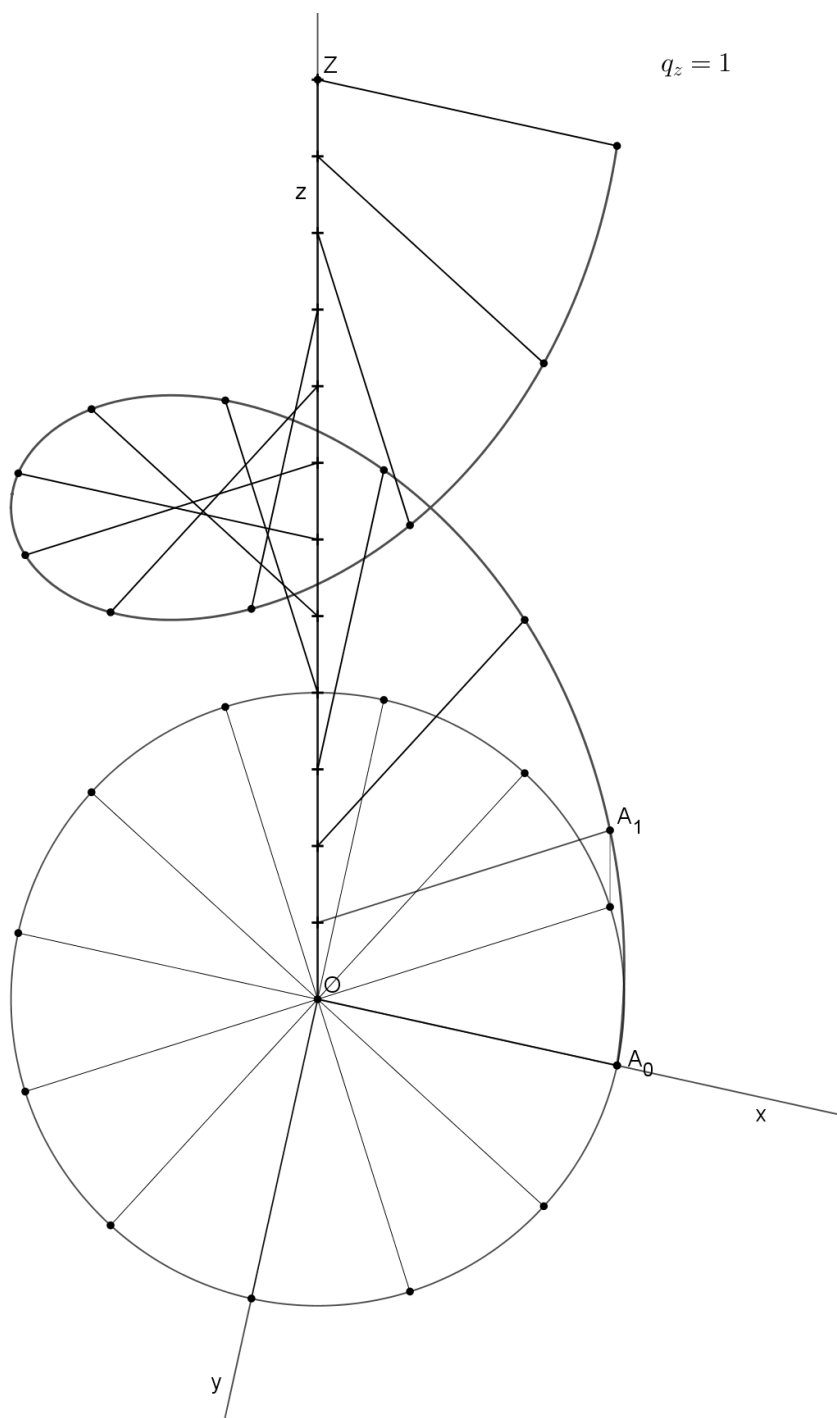
Adott egy csavarvonal csavarhengere alapkörével és magasságával Monge-projekcióban. Szerkesszük meg a P_1 pontból kiinduló, a hengerre írható csavarvonalat min. 12 pontjával! Szerkesztendő továbbá a csavarvonal iránykúpja, továbbá a görbe egy pontjában az érintőegyenes.



Adott egy csavarvonal Monge-projekcióban, melynek csavarhengere függőleges tengelyű. Szerkesztendő a csavarvonalra illeszthető, laposmenetű torzcsavarfelület min. 12 alkotója. Szerkesszük meg egy alkotójának min. 2 pontjában a felületi érintősíkot is!



Madárvetületben adott egy hengeres csavarvonal és az arra illeszthető laposmenetű torzcsavarfelület axonometrikus képe. Szerkesszük meg a csavarfelület kontúrgörbáját!



A kapott kontúrgörbe axonometrikus képe csúcsos.

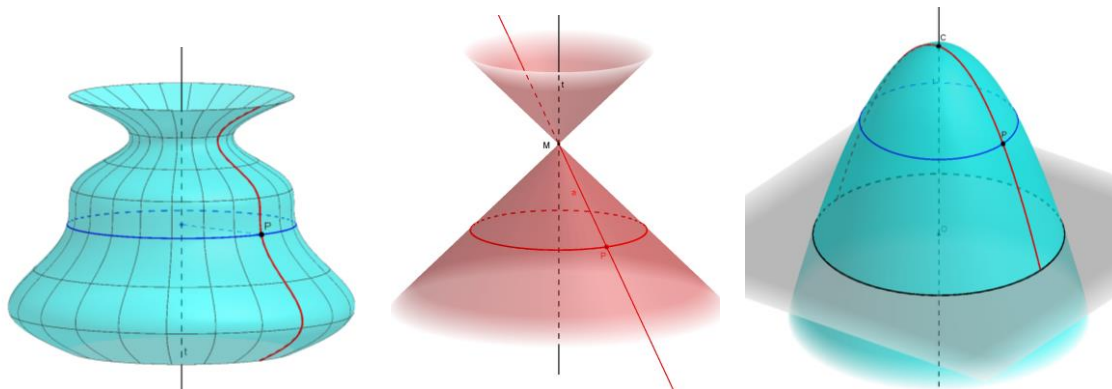
15. További, az építészetben alkalmazott felületek

Legfontosabb felületi osztályok (ismétlés és újratárgyalás)

1. Forgásfelület

Egy görbe egy adott tengely körüli forgatásával előállítható felület.

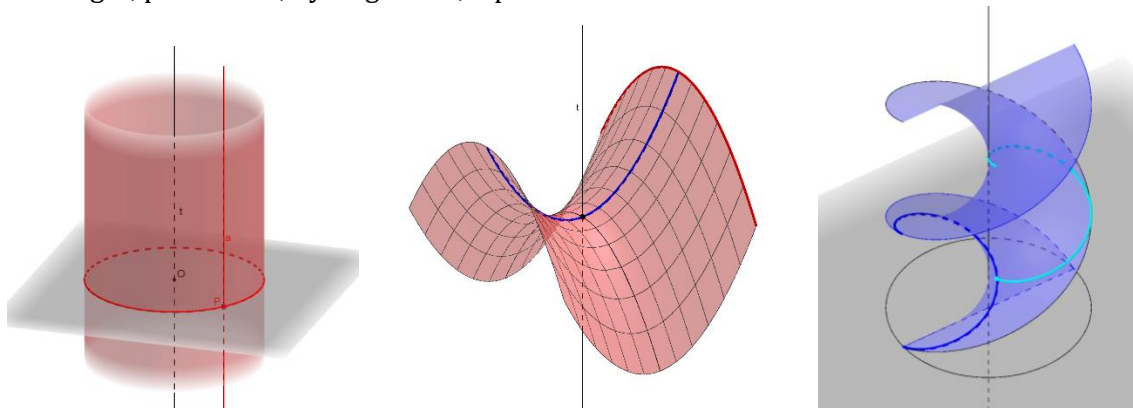
→ henger, kúp, gömb, forgásellipszoid, forgásparaboloid, egyköpenyű forgáshiperboloid, tórusz



2. Transzlációs felület

Egy görbét, az ún. *leíró- vagy profilgörbét* egy azt metsző, másik görbe, az ún. *pályagörbe* mentén mozgatunk.

→ henger, paraboloid, nyeregfelület, laposmenetű torzcsavarfelület



3. Vonalfelület

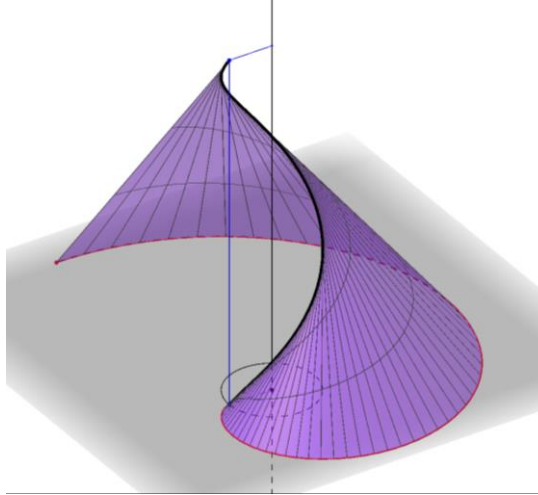
Olyan felület, amelynek minden pontján át felvehető legalább egy, a felületre illeszkedő egyenes.

- Ha a vonalfelület minden pontja parabolikus, akkor *kifejthető* (vagy síkba teríthető) a felület. Ekkor egy alkotón az érintősík az alkotó minden pontjában ugyanaz.

Bebizonyítható, hogy három típus lehetséges:

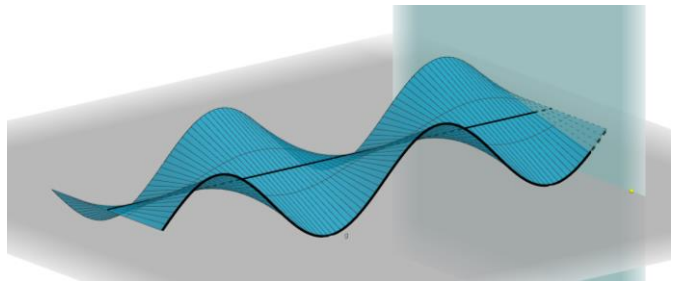
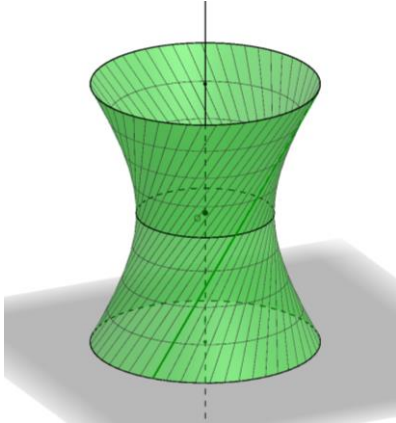
- kúpfelületek
- hengerfelületek
- térgörbék érintőegyeneseiből álló felületek (érintők=alkotók)

→ henger, kúp, csavarvonal érintőegyenesei által kapott csavarfelület



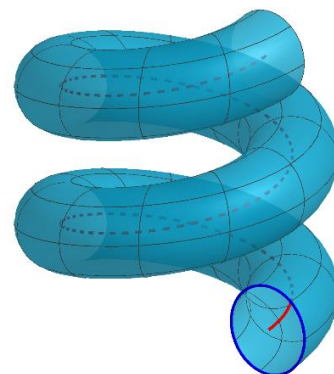
2. Minden más esetben a felületi pontok hiperbolikus vagy hiperbolikus és parabolikus pontokból állnak. Ezek az ún. *torzfelületek*. Ekkor egy alkotón az érintő sík az alkotó minden pontjában különböző.

→ egyköpenyű hiperboloid, nyeregfelület, konoidok, laposmenetű torzcsavarfelület



4. **Csavarfelület** – Egy görbét egy csavarvonal mentén mozgatunk vagy csavarmozgással előállítható felület. A mozgó görbe a *leíró görbe*, a csavarvonal a *pályagörbe*. Ha a leíró görbe metszi a csavarvonal tengelyét, akkor *zárt* a felület, ellenkező esetben *nyitott*. Ha a leíró görbe egy egyenes és az merőleges a tengelyre, akkor *laposmenetű* a felület, minden más szög esetén *élesmenetű*.

Léteznek még egyéb felületi osztályok is, akár a fentiek részhalmazaként, ilyenek például a csőfelületek.

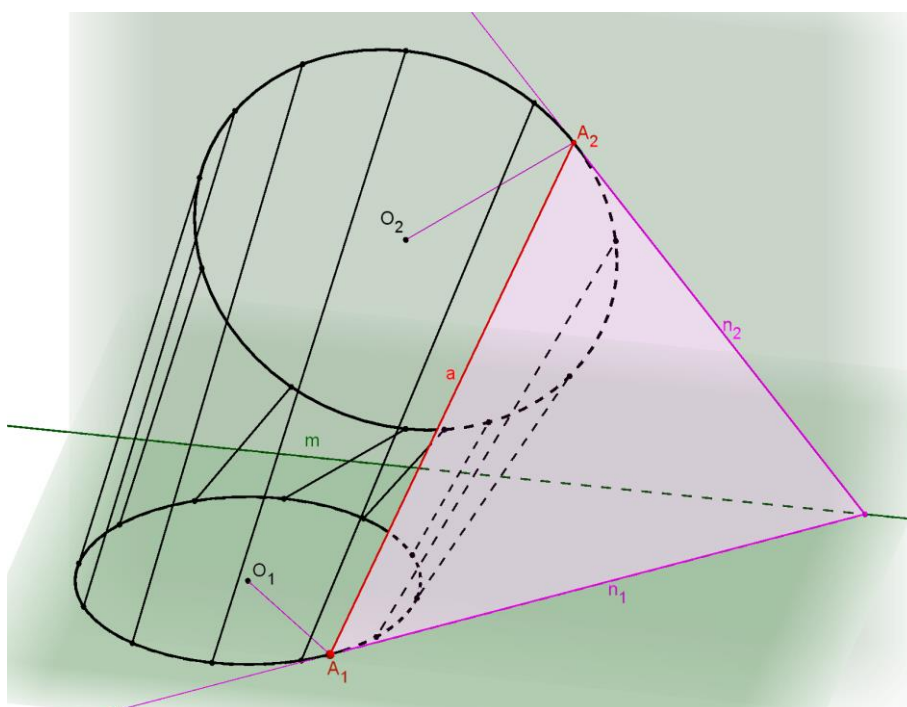


Lehetséges a felületek osztályozása aszerint, hogy leírható-e egy polinomfüggvénnyel. Eszerint két nagyobb osztályt kapunk:

1. algebrai felületek – másod-, harmad-, negyedrendű felületek
→ minden másodrendű felület, tórusz, egyes konoidok
2. transzcendens felületek
→ laposmenetű torzcsavarfelület

Két síkgörbével előállítható kifejthető felület

Tekintsünk két, nem egy síkban fekvő görbét, amelyeket *vezérgörbék*nek nevezünk. A két görbét kössük össze egyenesekkel (alkotókkal) úgy, hogy a minden alkotóra teljesül az alábbi kritérium: az alkotó vezérgörbékre eső pontjaiban a két vezérgörbe adott pontokba húzható érintői egy pontban találkoznak. Ez a metszéspont a két sík metszésvonalára illeszkedik.



Belátható, hogy az így kapott felület valójában egy térgörbe érintőegyeneseit tartalmazó felület. Az érintőegyenesek a felület alkotói. A térgörbe vetülete az alkotóegyenesek vetületeinek burkológörbéje. (→ Ha a térben a térgörbét érintik az alkotók, akkor a vetületen is.)

Rövid indoklás az érdeklődőknek:

Ha a felület egy térgörbe érintőegyeseiből áll, akkor kifejthető, azaz minden pontja parabolikus. Ekkor egy-egy alkotó mentén a felületi érintősík változatlan, emiatt bármilyen síkmetszet (alkotóra illeszkedő) pontbeli érintője az alkotóhoz tartozó érintősíkban van.

Két síkmetszet esetén egy kiválasztott alkotó egy-egy pontban metszi a két síkot. Mindkét pontban a síkmetszethez tartozó érintő benne van az alkotó érintősíkjában. Ezért a két érintőegyenes metszi egymást – triviálisan a két sík metszésvonalán.

Burkolófelületek

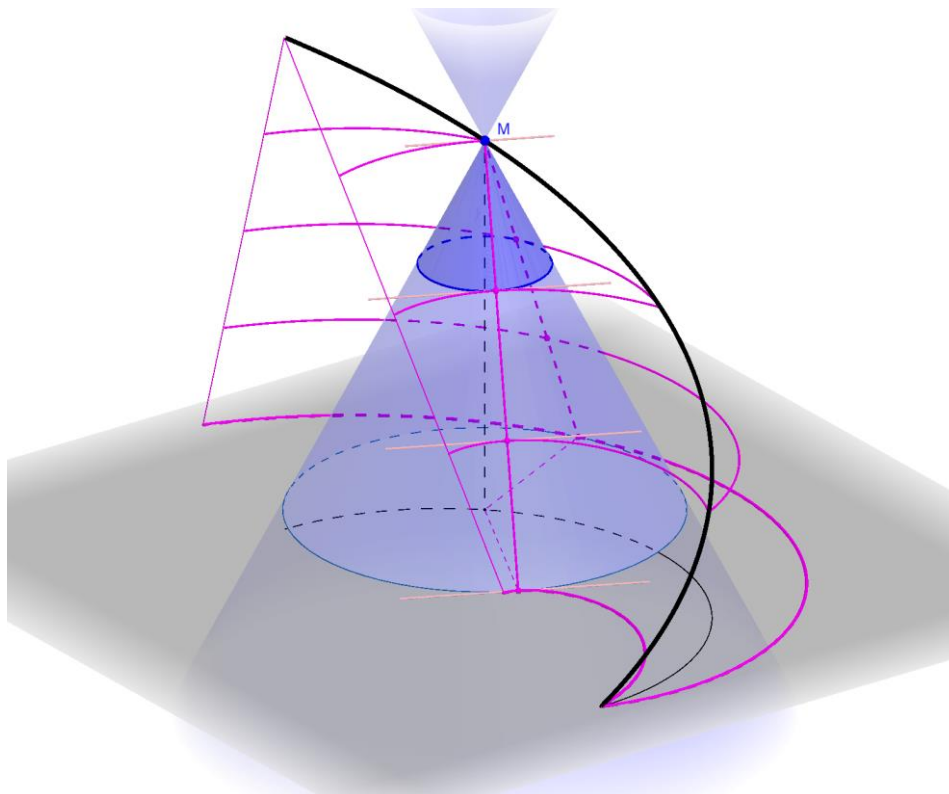
Mozgással (eltolással, forgatással, csavarással) egymásba tolható felületek egy közös érintőfelülete egy *burkolófelület* ad.

Néhány evidens példa:

- gömb párhuzamos eltolása során a gömbök közös burkolófelülete egy henger,
- kúp párhuzamos eltolásakor a két burkolófelület egy metsző síkpár.

Egy fontos példa

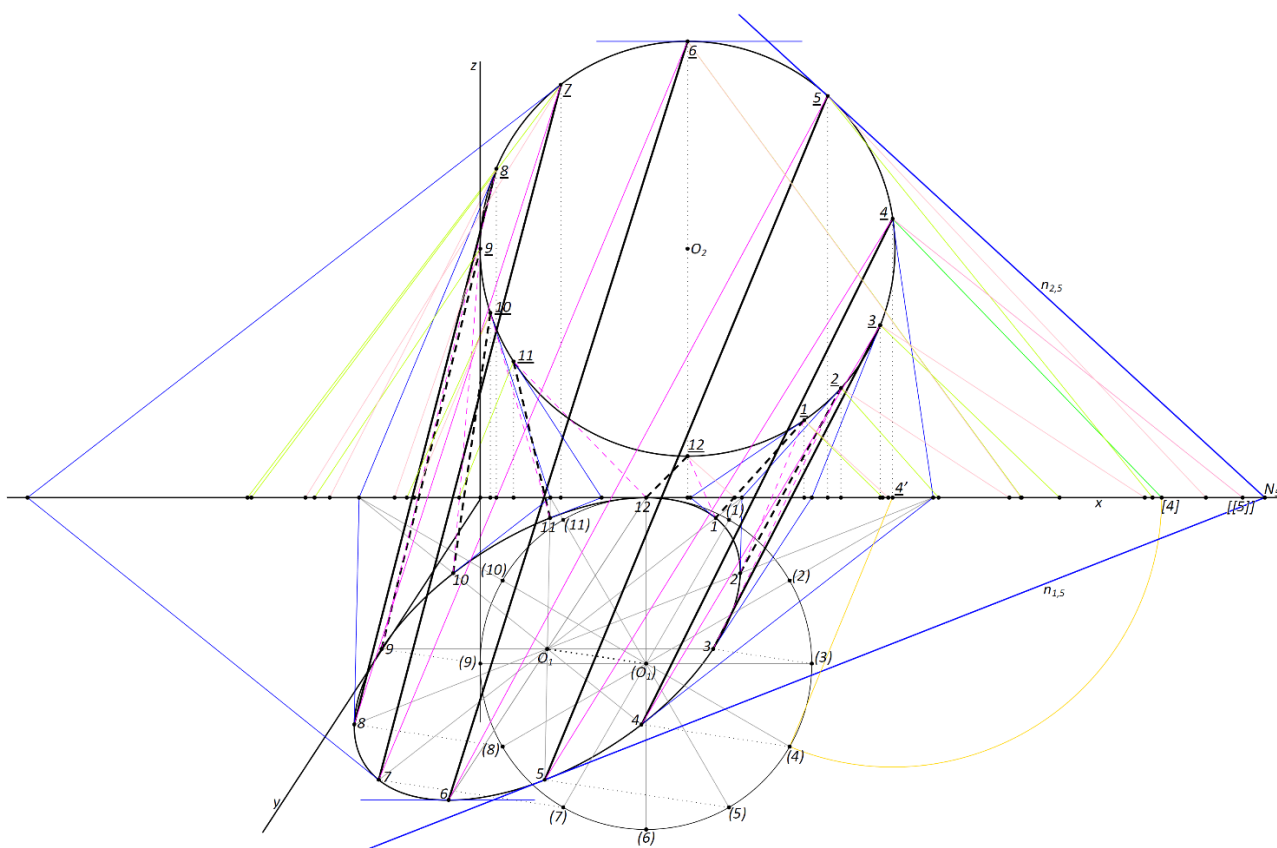
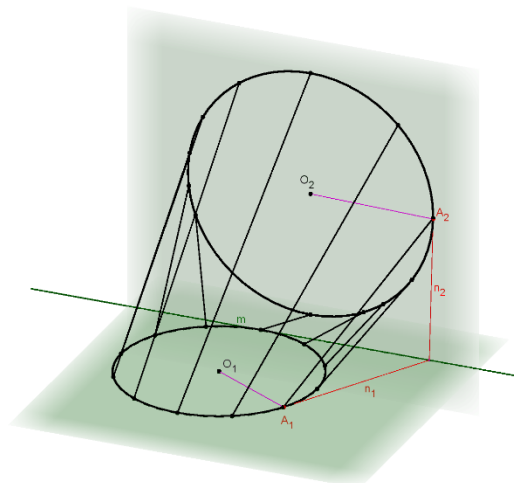
Ha a kúp csúcsa egy csavarvonalon mozog, akkor a mozgó kúp egy alkotója mindig rajta van a felületen. A felület adott magasságban fekvő görbéi érintik a kúp ugyanolyan magasságban fekvő paralelkörét. Mivel az alkotók mentén az érintősík mindig azonos, így a burkolófelület kifejthető.



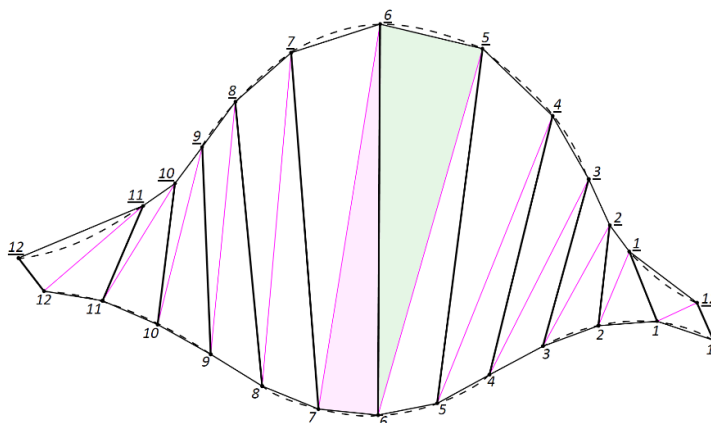
Egy kidolgozott példa (érdeklődőknek)

Frontális axonometriában két, különböző síkban fekvő kör segítségével kapható kifejthető felület szerkesztése. Itt a cél a közös érintősíkok megtalálása. Az $[x,y]$ -beli kör egy pontjához érintőt szerkesztünk, majd a kapott x tengelyre eső pontból érintőt húzunk a másik körhöz. Általában két megoldást kapunk, ebből az egyik sereg érintőt kell kiválasztani.

(A sárga segédvonalak az alkotók valódi nagyságának meghatározásában segítenek.)



A felületet síkba teríthetjük, ha a felületet kis darabokra – itt háromszögekre – bontjuk, majd az egyes alkotódarabok valódi nagyságaival és a körívek jó közelítésével a háromszögeket egymás mellé megszerkesztjük. Nem mérhető, de arányos végeredmény az alábbi ábrán látható.



16-17. Terepfeladatok

Ebben az összevont fejezetben kótás ábrázolásban dolgozunk.

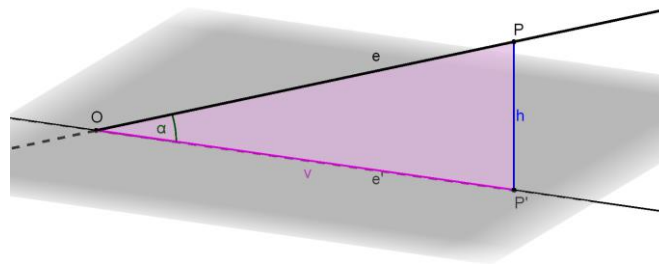
Egyenes lejtője és rézsűje

$$\text{lejtő/lejtés: } l = tg \alpha = \frac{h}{v}$$

A lejtés megadása százalékos formában: $p = 100 \cdot l \%$

$$\text{rézsű: } r = ctg \alpha = \frac{v}{h} = \frac{1}{l}$$

Ha $h=1$, akkor r éppen az egyenes osztóköze.



Példa: $h=2$, $v=6$, akkor $l = \frac{1}{3}$, $p=33,3\%$ és $r=3$.

Méretarány

$M = \text{„szakasz rajzi hossza”} : \text{„szakasz valódi hossza”}$

Néhány tipikus példa

M=1:50	1 cm 50 cm-nek felel meg	1m rajzi hossza 2 cm
M=1:100	1 cm 100 cm-nek felel meg	1m rajzi hossza 1 cm
M=1:200	1 cm 200 cm-nek felel meg	1m rajzi hossza 0,5 cm
M=1:250	1 cm 250 cm-nek felel meg	1m rajzi hossza 0,4 cm

A méretarány ismeretében bármilyen szakasz rajzi hossza kiszámítható. Ha például $M=1:250$, akkor 3,5 m rajzi hossza: $\frac{1}{250} \cdot 350 = 1,4 \text{ cm}$.

Legfontosabb fogalmak egy terepfelületen

szintvonal:

esésvonal:

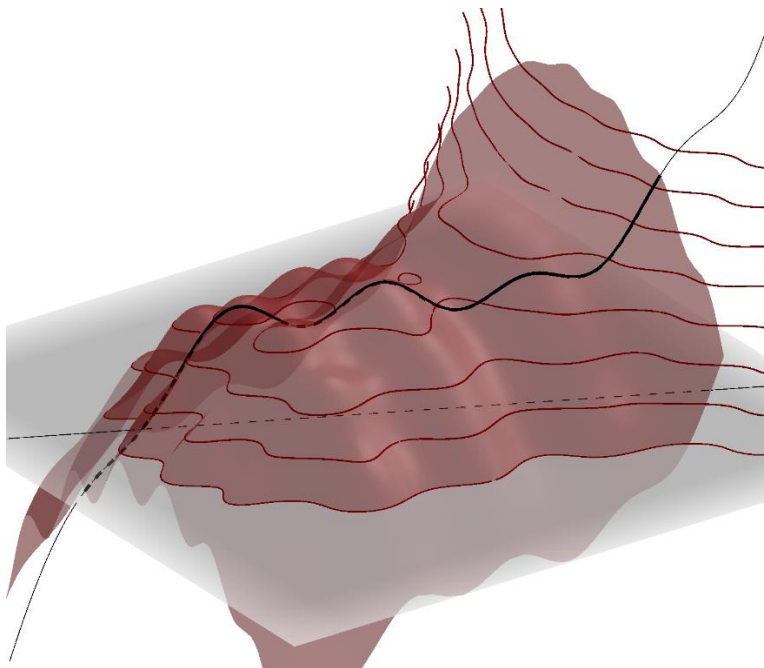
csúcspon:

medence- vagy mélypont:

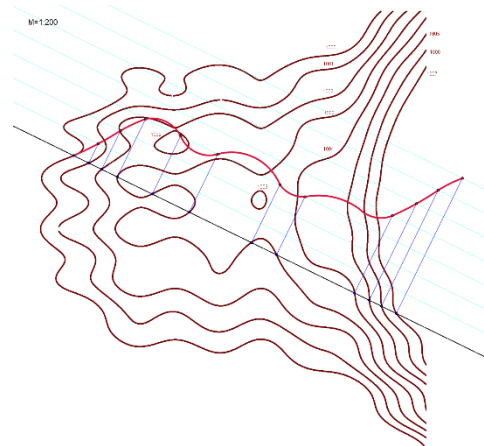
nyeregpon:

gerincvonal:

völgyfenékvonal:



Terepszelvény:



Legfontosabb fogalmak földmunkák esetén

plató:

út koronavonala:

út tengelyvonala:

semleges pont:

semleges vonal:

rézsűkúp:

rézsűsík:

rézsűfelület:

feltöltés:

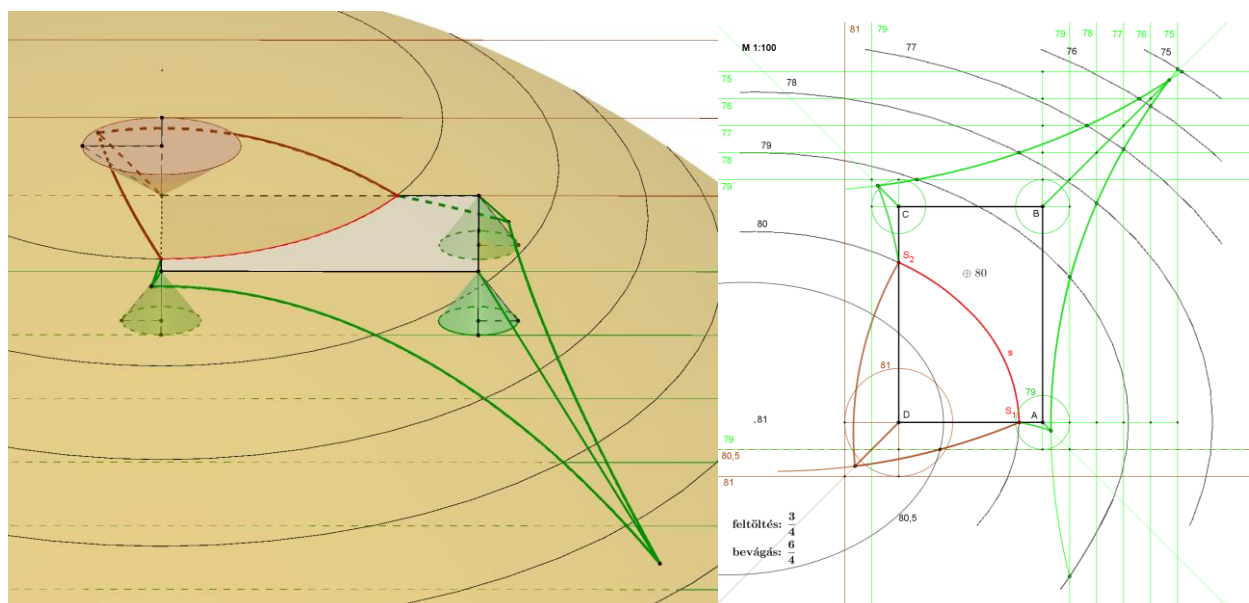
bevágás:

lábvonal:

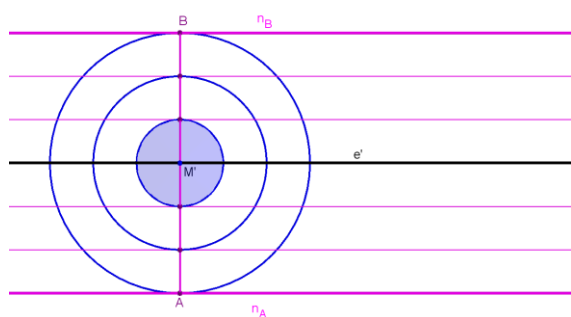
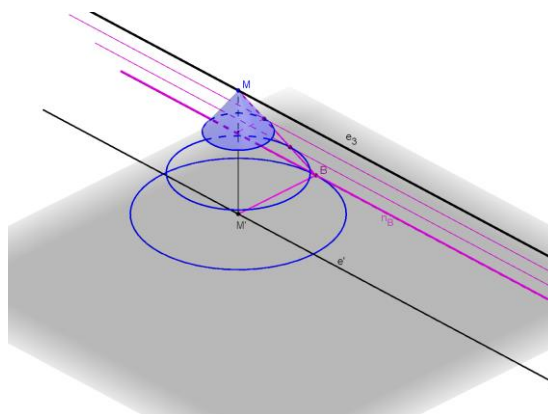
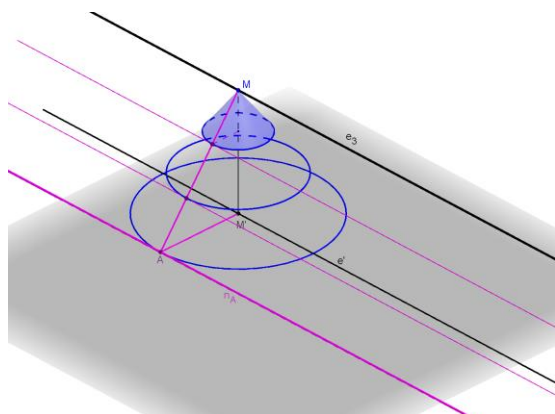
körömvonal:

szaruél:

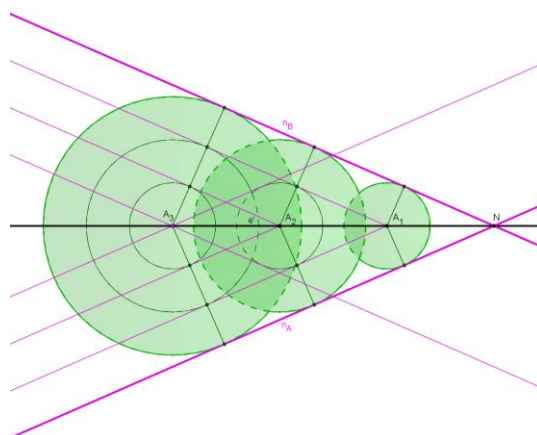
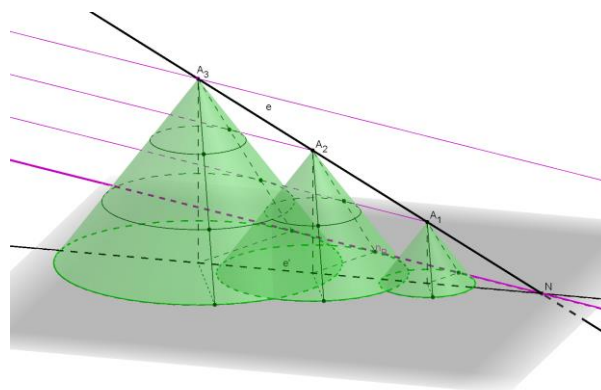
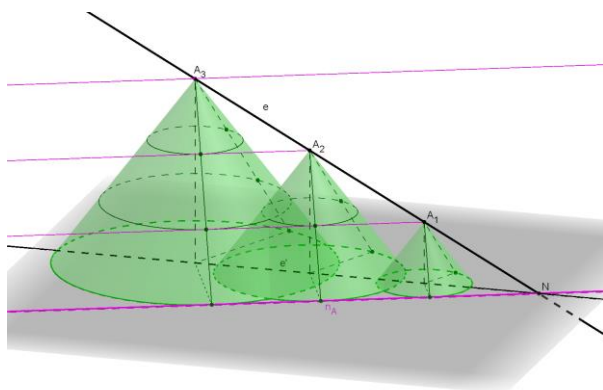
vápa:



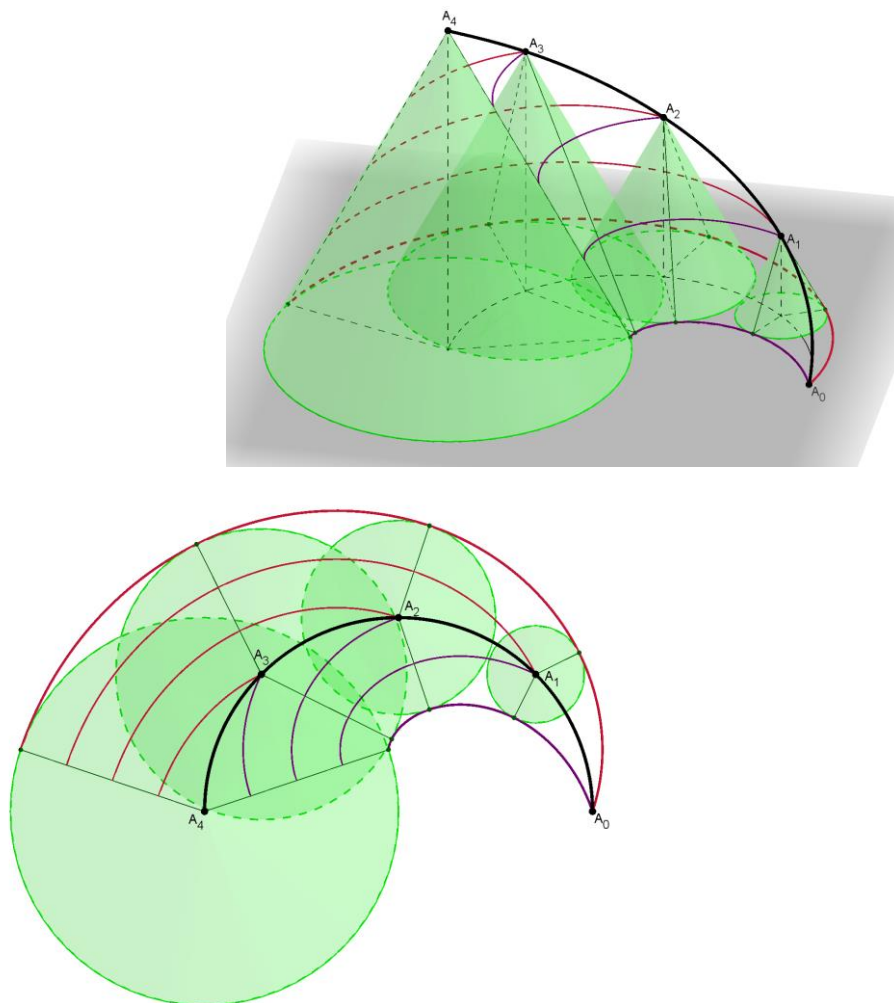
Vízszintes egyeneshez tartozó rézsűsíkok



Tetszőleges egyeneshez tartozó rézsűsíkok



Csavarvonalhoz tartozó részfűfelületek



Lehetséges módszerek a feltöltés és bevágás meghatározására

- részfűfelületek alkalmazása
- profilmódszer

Hagyományos színezés

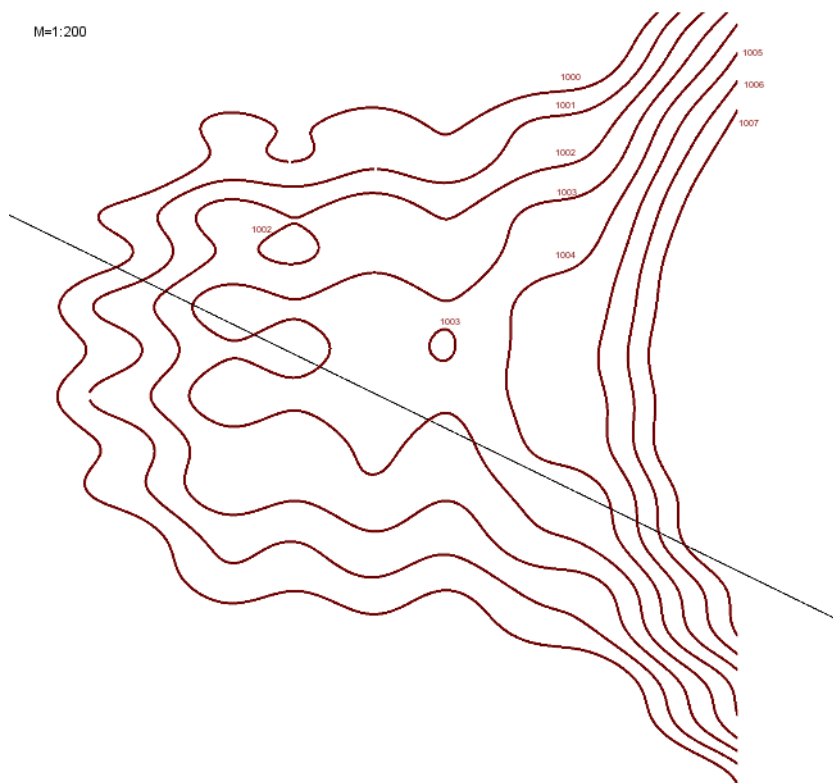
- eredeti terep: világosbarna
- bevágás: sötétbarna
- feltöltés: zöld
- plató, út alapidomai: szürke
- tengelyvonal: piros

Egy terepről készülhet szemléletes ábra is, ha például madár- vagy katonai vetületben ábrázoljuk az adott terepet és az esetleges földmunkákat.

Alapvető szerkesztések

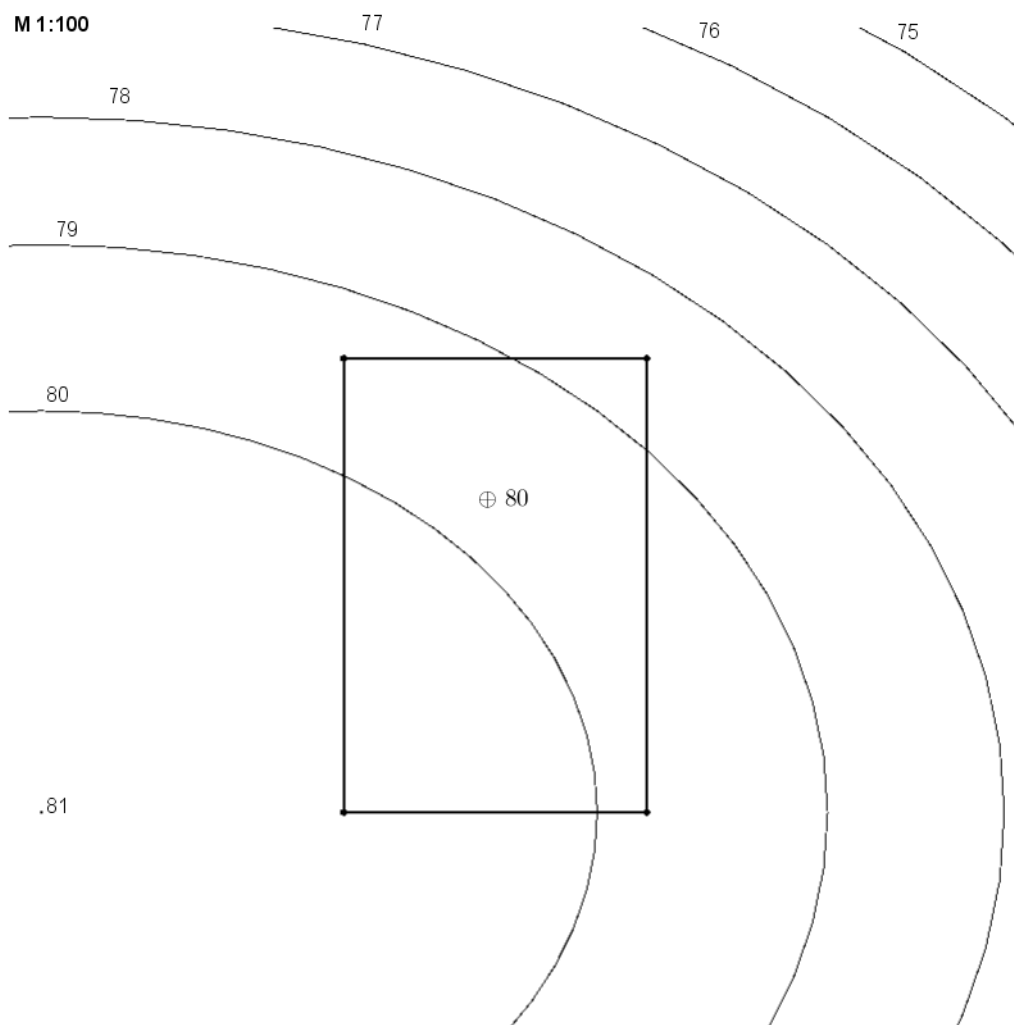
Adott az ábrán látható terep $M=1:200$ -as méretaránnyal. Határozzuk meg az ábrán látható síkmetszetet, azaz terepszelvényt!

Válasszunk ki egy A és egy B pontot a terepszelvényről, majd állapítsuk meg, hogy az A pontból látszik-e a B pont!



Szerkesszük meg az ábrán látható terepre az adott vízszintes platóhoz tartozó feltöltési és bevágási munkálatokat!

A feltöltés rézsűje $\frac{3}{4}$, a bevágásé $\frac{6}{4}$.



Megjegyzés: Ha a feltöltés vagy bevágás láb- vagy körömvonalai a platótól messze metszik egymást, gyakran a plató sarkait rézsűkúpokkal kerekítjük le. (Erre szép példa a Lőrincz-Petrich tankönyv 484. ábrája a 302. oldalon.)